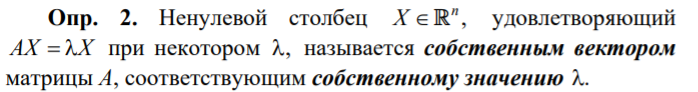
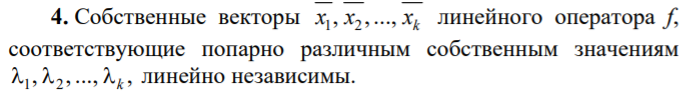
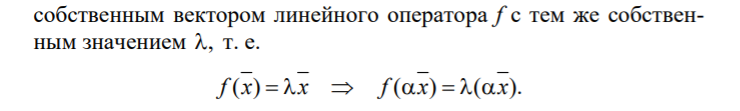
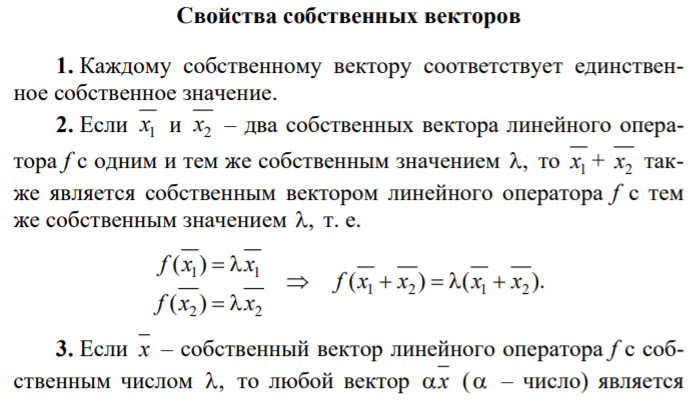
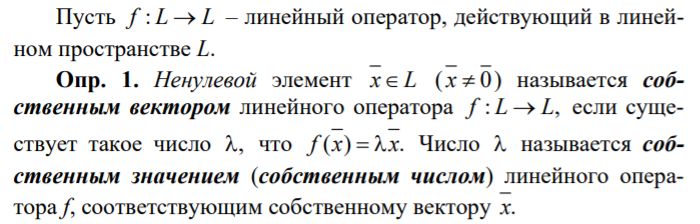
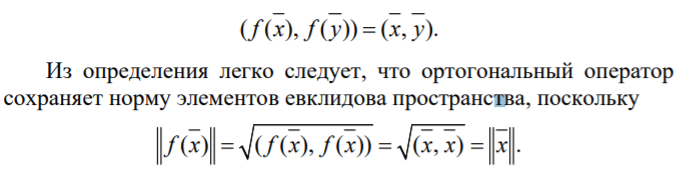
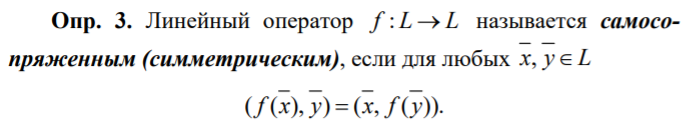
**1. Линейные операторы и их матрицы…**Пусть L1 и L2 – два линейных пространства. **Опр. 1.** Если задано правило f, по которому каждому элементу ∈L1 ставится в соответствие некоторый элемент L2, то задан оператор, действующий из L1 в L2: f : L1 → L2; при этом элемент =f() называется образом элемента , а элемент – прообразом элемента . **Опр. .** Оператор :f: L1→ L2 : называется линейным, если для любых элементов ,∈L1 и любого числа α∈R выполняются условия: 1)f() = f(+ f(;2) f(α ) = αf(). **Утв. 1.** Оператор f: L1 →L2 является линейным тогда, когда для любых элементов , , и любых α,β∈ R выполняется условие f() = αf(+ βf(;  
**Опр. 4.** Матрица столбцы которой состоят из координат векторов f( f( называется **матрицей линейного оператора f.** Пусть E = {} – базис линейного пространства L; E′ = {} – новый базис линейного пространства L, T=– матрица перехода от базиса E к базису E .′ Утв. 2. Если f: L→L – линейный оператор и – матрица линейного оператора f в базисе E, а ’ – матрица линейного оператора f в базисе E′, то ’ =. Доказательство. Пусть X и Y – столбцы координат элемента ∈L и его образа = f() в базисе E, а X′ и Y′ – столбцы координат элементов и =f() в базисе E’. Если – матрица линейного оператора f в базисе E, то Y=X. Выражая X и Y через X′ и Y′, получи, TY’=TX’ ⇔Y’= X′ откуда, в силу , Y’=X′ ,получим . **Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду** . Т 2. Матрица линейного оператора имеет диагональный вид , когда каждый базисный вектор является собственным вектором этого линейного оператора. **Опр. 5.** Матрица линейного оператора называется приводимой к диагональному виду, если существует такая невырожденная матрица T, что матрица B =T является диагональной. Т 3. Матрица линейного оператора f приводима к диагональному виду, когда существует базис, состоящий из собственных векторов оператора f **. Замечание**. Не каждый линейный оператор n-мерного линейного пространства имеет n линейно независимых собственных векторов, потому не всегда матрицу линейного оператора можно привести к диагональному виду.

**2. Собственные значения и собственные…**

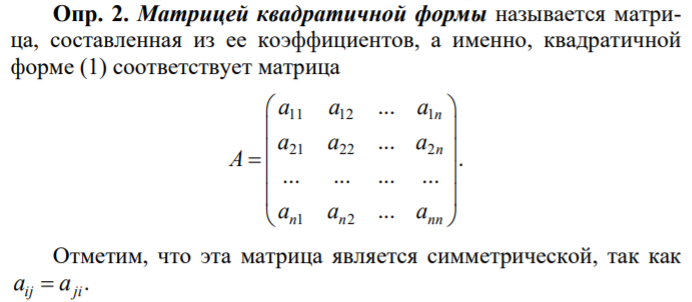
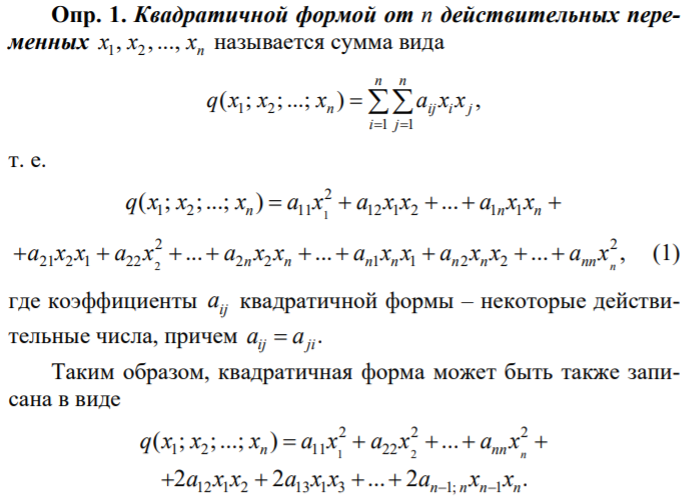
**3. Ортогональные и самосопряженные (симметрические) операторы в евклидовом пространстве.   
Опр. 1.** Евклидовым пространством называется действительное линейное пространство L, в котором определена операция скалярного умножения элементов: каждой паре элементов , ∈L ставится в соответствие действительное число ( ,), которое называется скалярным произведением элементов и, причем эта операция удовлетворяет следующим 4 аксиомам: для любых  , ∈L и любого α ∈R 1) ( ,)=( , );2) ( +)=( ,)+();3) ( α , )=α ( ,); 4) ( , ) ≥0, причем ( , )= 0 ⇔ = 0  
**Опр. 1**. Линейный оператор f : L→L называется ортогональным, если он сохраняет скалярное произведение элементов евклидова пространства L, т. е. если для любых , L∈x,y выполняется равенство.

**  
Т 1. Линейный оператор** f : L→L, действующий в евклидовом пространстве, является ортогональным, когда он переводит ортонормированный базис евклидова пространства L в ортонормированный базис этого пространства. **Опр**. 2. Матрица A называется ортогональной, если A = E.Свойства ортогональных матриц. 1. Если A – ортогональной матрица, то 2. Если A – ортогональной матрица, то detA = ±1.



Опр. 4. Матрица A называется симметрической, если , т. е. она симметрична относительно главной диагонали. Т 3. Линейный оператор f является самосопряженным, когда в любом ортонормированном базисе его матрица является симметрической. Утв. 2. Все собственные значения симметрической матрицы с действительными элементами являются действительными числами. Утв. 3. Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. Т 4. Если f – самосопряженный линейный оператор в евклидовом пространстве L, то в евклидовом пространстве L существует ортонормированный базис из собственных векторов линейного оператора f. Следствие. Матрица самосопряженного линейного оператора в евклидовом пространстве приводима к диагональному виду

**4. Квадратичные формы и их приведение к каноническому виду.**

**Алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду** (;)= + +…+ (2) Опр. 3. Если квадратичная форма записана в виде (2), то говорят, что она приведена к каноническому виду.

1. Записать матрицу квадратичной формы и найти собственные значения этой матрицы. 2. Найти собственные векторы матрицы квадратичной формы и нормировать их. 3. Записать матрицу T, составив ее из полученных нормированных векторов-столбцов. 4. Записать искомое преобразование переменных по формуле

**5. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.** Пусть = {… }.**Опр. 5**. Квадратичная форма q() называется:**1.**положительно определенной, если q()>0 для всех ≠ 0; **2.**отрицательно определенной, если q() <0 для всех ≠ 0;**3.**положительно полуопределенной, если q()≥0 для всех ≠ 0;**4.**отрицательно полуопределенной, если q()≤0 для всех ≠ 0; **5.**знаконеопределенной, если существуют такие и что q()>0 и q()<0.

|  |  |
| --- | --- |
| **Если квадратичная форма** | **то собственные значения ее матрицы** |
| положительно определена, | все положительны; |
| отрицательно определена, | все отрицательны; |
| положительно полуопределена, | все неотрицательны; |
| отрицательно полуопределена | , все неположительны |

Пусть A=()– матрица квадратичной формы q(). **Опр. 6.** Главными минорами квадратичной формы q() называются миноры матрицы A, стоящие в левом верхнем углу:; :;| detA . По знакам главных миноров квадратичной формы можно легко проверить знакоопределенность квадратичной формы с помощью критерия Сильвестра.   
**Т 1 [критерий Сильвестра].** 1) Квадратичная форма q() является положительно определенной, когда все ее главные миноры положительны; 2) квадратичная форма q() является отрицательно определенной, когда ее главные миноры нечетного порядка отрицательны, а четного – положительны.

**6. Функции двух переменных, область определения, линии уровня. Предел и непрерывность функции двух переменных. Опр. 1.** Если каждому набору значений n переменных величин … из некоторого множества X поставлено в соответствие определенное число z∈Z , то говорят, что на множестве X задана функция n переменных z=f(… ); переменные … называют независимыми переменными, z называют зависимой переменной, множество X называют областью определения, а множество Z – областью значений функции. **Опр. 2. Линией уровня** Ф2П z=f(x;y) называется множество точек плоскости, в которых функция принимает одно и то же значение c, т. е. f(x;y)=с;**Опр. 3. δ-окрестностью () δ точки ( ; )** называется множество точек M(x;y) плоскости, находящихся на расстоянии менее δ от точки , т. е. < δ**. Опр. 4.** Число A называется **пределом функции** z =f(x;y) при x→ ,y → : limf(x;y) = A если для любой сколь угодно малой ε -окрестности (A) точки A найдется такая проколотая δ-окрестность () точки ( ; ), что для всех точек (x;y) ∈ () имеет место f(x;y)∈ (A). **Опр. 5.** Последовательность точек ( ; ), ( ; ), ( ; ),сходится к точке ( ; ), если ; **Опр. 5. Число A называется пределом функции** z = f(x;y); в точке ( ; ) : limf(x;y) = A если для любой сходящейся к ( ; ) последовательности точек ( ; ), ( ; ), ( ; ),отличных от ( ; ), соответствующая последовательность значений функции ( ; ), ( ; ), ( ; ), ( ; ), ( ; ), ( ; ),сходится к числу A. **Опр.** 6. Функция z= f(x;y) называется бесконечно малой при x→, y → , если lim f(x;y)=0.**Опр. 7.** Функция z= f(x;y) называется непрерывной в точке( ; ), если lim f(x;y)= lim f( ; ) **Опр. 8**. Если функция z= f(x;y); определена в некоторой окрестности точки ( ; ), но условие непрерывности lim f(x;y)= lim f( ; ) не выполняется, то точка ( ; ) называется точкой разрыва функции z = f(x;y).

**7. Частные производные функции двух переменных, их геометрический смысл…Опр. 3.** Частной производной функции z =f (x;y ) по некоторой переменной называется предел отношения частного приращения функции по этой переменной к приращению этой переменной, когда последнее стремится к 0: ;ля нахождения частной производной z по x следует продифференцировать функцию z по переменной x, считая y постоянным. **Геометрический смысл частных производных**: Фиксируя на поверхности z=f(x;y) одну из переменных, (y= , получаем некоторую линию – сечение поверхности плоскостью y=. **Геометрический смысл частных производных:** значение частной производной функции z=f(x;y) по переменной x в точке ( ; ), равно тангенсу угла наклона касательной, проведенной в точке ( ; ; ), к линии пересечения поверхности z=f(x;y) и плоскости y=:

; =tgα.Аналогично, ; =tgβ; **Дифференцируемость функции 2 переменных:** **Опр. 4.** Функция z=f(x;y) называется дифференцируемой в точке ( ; ), если ее полное приращение в этой точке представимо в виде Δz = AΔx + BΔy + α(Δx; Δy)Δx + β(Δx;Δy)Δy, где A и B – некоторые числа, зависящие только от точки ; , но не зависящие от Δx и Δy, а α = α(Δx;Δy) и β = β(Δx; Δy) – бесконечно малые при Δx → 0,Δy →0.**Т 1 [необходимое условие дифференцируемости].** Если функция z=f(x;y) дифференцируема в точке ; , то она непрерывна в этой точке.Обратное неверно. **Т 2 [необходимое условие дифференцируемости].** Если функция z = f(x;y) дифференцируема в точке ; , то в этой точке существуют частные производные, причем ; ; . Обратное неверно. **Т 3 [достаточное условие дифференцируемости].** Если функция z = f(x;y) в некоторой окрестности точки ; , имеет частные производные, и эти частные производные непрерывны в самой точке ; , то функция z = f(x;y) дифференцируема в точке ; .

**8. Частные и полное приращение функции нескольких переменных…**Пусть функция z=f(x;y) определена и непрерывна в некоторой окрестности точки ( ; ), (включая саму эту точку) x и y – независимые переменные, они могут изменяться или оставаться неизменными независимо друг от друга. Давая некоторое приращение одной из переменных при сохранении значения другой, получим **частное приращение функции**.**Опр. 1.** **Частное приращение функции** z=f(x;y) по переменной x в точке ( ; ), отвечающее приращению аргумента Δх, определяется равенством Δx;-f ( ; );Частное приращение функции z=f(x;y) по переменной y определяется равенством -f ( ; )**; Опр. 2. Полным приращением функции** z=f(x;y); в точке ( ; ), отвечающим приращениям аргументов Δx и Δy, называется Δx;-f ( ; **).** Δz ≠ + . **Дифференциал функции двух переменных Опр. 5.** Если функция z=f(x;y) дифференцируема в точке( ; ), то главная, линейная относительно Δx и Δy часть полного приращения функции называется полным дифференциалом этой функции: dz=;Так как для независимых переменных Δx=dx, Δy =dy ,то dz=.Опр. 6. Выражения называются **частными дифференциалами**. dz=, но Δz ≠. **Геометрический смысл дифференциала.** Частная производная Ф2П геометрически равна тангенсу угла наклона касательной к линии, которая получается в сечении поверхности z=f(x;y) соответствующей вертикальной плоскостью. Если к поверхности z=f(x;y) провести в точке ( ; ) ,где;, касательную плоскость, то эта плоскость будет содержать все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку. **Уравнение касательной плоскости к поверхности z=f(x;y)**; в точке ( ; ), имеет вид z-( ; ) ()+( ; ) (). **Геометрический смысл дифференциала:** дифференциал функции z=f(x;y); в точке ( ; ), отвечающий приращениям аргументов Δx и Δy, равен приращению аппликаты касательной плоскости, проведенной к поверхности в этой точке.

**9. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных.** Частные производные и называют **частными производными первого порядка.** Они также могут иметь частные производные, которые называются **частными производными второго порядка**:z=z(x;y)->.При этом частные производные взятые , по различным переменным, называются **смешанными производными**. Аналогично определяются производные 3-его и более высоких порядков. **Т 4.** Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся только порядком дифференцирования по различным переменным, равны между собой, в частности: . **Опр. 7**. Дифференциалом 2-ого порядка называется дифференциал от дифференциала первого порядка: = d(dz). Аналогично, дифференциалом n-го порядка называется дифференциал от дифференциала (n-1)-го порядка: = d(z).Пусть функция z=f(x;y) имеет непрерывные частные производные, x и y – независимые переменные . Вычислим дифференциал второго порядка=d(dz)=d( . Аналогичный результат имеет место для дифференциалов высших порядков.   
**Геометрический смысл частных производных** Фиксируя на поверхности z = f ( x; y) одну из переменных, например, y= , получаем некоторую линию – сечение поверхности плоскостью y= . Геометрический смысл частных производных аналогичен геометрическому смыслу производной функции одной переменной: значение частной производной функции z = f ( x; y) по переменной x в точке ( ; ) равно тангенсу угла наклона касательной, проведенной в точке ( ; ; ) к линии пересечения поверхности z = f ( x; y); и плоскости y=: ; =tgα.

**10. Правило дифференцирования сложной функции нескольких переменных... 1. Случай одной независимой переменной.** Пусть z=z(x;y) – дифференцируемая ф-ция двух переменных х и у, которые являются дифференцируемыми ф-ями переменной t: х = х(t), у = y(t). Функция z =z(x(t);y(t)) является сложной ф-цией 1-ой независимой переменной t, переменные х и у называются промежуточными аргументами**. Т 1.** Если ф-ции x(t) и y(t) дифференцируемы в точке t0 , а функция z = z(x;y) дифференцируема в точке ( ; ), где , то сложная ф-ция z=z(x(t);y(t)) дифференцируема в точке t0, причем . **Доказательство.** Чтобы доказать, что функция z=z(x(t);y(t)) дифференцируема в точке t0 , нужно показать, что существует . Дадим независимой переменной t приращение ∆t. Тогда переменные х и у получат приращения ∆х и ∆у, а функция z – приращение ∆z соответственно. Так как функция z=z(x;y) дифференцируема, то ∆z=∆х+ где lim=0, Если Δt→0, то в силу того, что функции х = х(t) и у = y(t) дифференцируемы, а следовательно, непрерывны, Δx→0;Δy→0. Поэтому, переходя в равенстве к пределу при Δt→0, получим ;**Следствие 1.** Если z=z(x;y) – дифференцируемая функция двух переменных х и у, причем х – независимая переменная, y=y(x) – дифференцируемая функция, то .**Замечание.** В этом случае производную называют полной производной z по x в отличие от частной производной . **Следствие 2.** Если z=z(x;y) – дифференцируемая функция двух переменных х и у, а x=x(u;v),y=y(u;v) – дифференцируемые функции двух независимых переменных u и v, то . **Правило дифференцирования сложной ФНП:** производная сложной функции по независимой переменной равна сумме произведений частных производных по промежуточным аргументам на производные этих аргументов по независимой переменной. **Производная неявной функции** **Т 2.** Пусть функция z=z(x;y) задана неявно уравнением F(x;y;z )=0 и функция F(x;y;z) имеет непрерывные частные производные по всем аргументам, причем (x;y;z)≠0 . Тогда .**Доказательство.** Используя правило дифференцирования сложной функции, продифференцируем уравнение F(x;y;z)=0 по переменной х, помня, что х и у – независимые переменные, а z=z(x;y) – функция: ⇒ . Аналогично, дифференцируя по у, получим : ⇒

Замечание. Производную функции одной переменной y=y(x), заданной неявно уравнением F(x;y)=0 можно найти по аналогичной формуле .

**11. Линии уровня, градиент и производная по направлению функции двух переменных. Свойства градиента.** Для характеристики скорости изменения функции в направлении заданного вектора вводится понятие **производной по направлению**. **Опр. 1**. **Производной функции z= f(x;y**) в точке ( ; ) по направлению вектора называется предел, если он существует и конечен, отношения приращения функции в данном направлении к величине перемещения при условии, что величина перемещения стремится к 0: =lim , где Δl=|, M(+Δx; Δy), ↑↑ , +Δx; Δy)-( ; );Направление вектора на плоскости полностью характеризуется углами α и β, которые вектор образует с осями координат, причем если , то ( ; ) и M(+Δx; Δy), таких, что ↑↑ , получим: Δl=|, Δx=Δl**;**Так как функция z=f(x;y) дифференцируема в точке ( ; , то ее полное приращение в этой точке представимо в виде ∆z=∆х+, где lim=0; Поэтому z= cos+,Если Δl → 0, то Δx→0, Δy →0, поэтому, переходя к пределу при Δl → 0, получим формулу cos+ Производная функции u=u(x;y;z) трех переменных по направлению вектора равна =cos+, где cos направляющие косинусы вектора ; | – длина вектора ; Частные производные являются производными по направлениям координатных осей. Градиентом функции u =u(x;y;z) называется вектор, координаты которого равны соответствующим частным производным функции: .Для функции z= f(x;y) 2 переменных градиент – это вектор **Основные свойства градиента**. 1. Производная по направлению вектора равна скалярному произведению градиента и единичного вектора этого направления: где , ↑↑ ||= 1.

Поскольку , где ϕ = ( ; ) – угол между векторами; 2. Градиент указывает направление наискорейшего возрастания функции. 3. Производная в направлении градиента равна модулю градиента: |если ↑↑

**12. Экстремумы функции двух переменных. Необходимое и достаточное условия экстремума.** Пусть функция z = f(x;y) определена в точке ( ; ) и некоторой ее окрестности. **Опр. 1.** Точка ( ; ) называется точкой локального максимума (минимума) ф-ции z =f(x;y), если для всех точек M(x;y) из некоторой проколотой окрестности точки ( ; ) имеет место f( ; ) >f(x;y). **Характерное свойство точек экстремума: в** некоторой окрестности точки экстремума приращение функции не меняет знак, а именно Δz < 0 в окрестности точки локального максимума и Δz > 0 в окрестности точки локального минимума**. Т1 [необходимое условие существования локального экстремума].** Если( ; ) – точка локального экстремума функции z = f(x;y), то в этой точке обе частные производные ( ; ), ( ; ) равны 0 или хотя бы одна из них не существует. **Опр. 2.** Точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума, называются **критическими**, а точки, в которых ( ; ) ( ; ) =0 - **стационарными точками функции** z =f(x;y**). Т 2 [достаточное условие существования локального экстремума Ф2П].** Пусть  **( ; ) – стационарная точка** функции z = f(x;y) и в окрестности этой точки функция имеет непрерывные частные производные второго порядка. Обозначим Δ = Тогда: 1) если Δ > 0 и > 0, то точка ( ; ) – точка локального минимума ф-ции z=f(x;y); 2) если Δ > 0 и < 0 то точка ( ; ) – точка локального максимума ф-ции z=f(x;y); 3) если Δ < 0, то точка ( ; ) не является точкой локального экстремума ф-ции z =f(x;y); 4) в случае Δ = 0 экстремум в ( ; ) может не быть; требуются доп исследования. **Т 3 [достаточное условие существования локального экстремума ФНП].** Пусть ( ;;…;)– стационарная точка ф-ции u=u( ; ),т.е **,** и пусть в окрестности этой точки ф-ция u=u( ; ) имеет непрерывные частные производные 2-ого порядка. Тогда: 1) если при всех наборах значений Δ ; не равных 0 одновременно, то точка ( ;;…;) является точкой локального минимума ф-ции u=u( ; );2) если при всех наборах значений Δ ; не равных 0 одновременно, то точка ( ;;…;) является точкой локального максимума ф-ции u=u( ; );3) если принимает как положительные, так и отрицательные значения, то ( ;;…;) не является точкой локального экстремума функции u=u( ; ); 4) если при всех наборах значений Δ ; имеет место ≥0 либо ≤ 0, причем существуют такие наборы значений Δ ; , не равных 0 одновременно, что =0, то вопрос о существовании локального экстремума функции u=u( ; ) в ( ;;…;) остается открытым; требуются доп исследования.

**13. Условный экстремум. Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных в области. Экстремум** ф-ции z=f(x;y), найденный при условии, что ϕ(x;y)=0, **называется условным**, а уравнение ϕ(x;y)=0 называется уравнением связи. В отличие от безусловной точки экстремума, значение ф-ции в точке условного экстремума сравнивается с ее значениями не во всех точках некоторой окрестности, а только в тех, для которых выполняется условие связи ϕ(x;y)=0. Когда уравнение связи сложно разрешить относительно какой-либо переменной или когда это приводит к громоздким вычислениям, для нахождения критических точек используется метод **множителей Лагранжа**. Пусть требуется найти экстремум ф-ции z = f(x;y) при условии, что ϕ(x;y)=0, т. е.{ **Метод множителей Лагранжа включает следующие этапы**: 1) составить ф-цию Лагранжа L(x;y;λ) = f(x;y)+ λϕ(x;y) 2) найти критические точки как критические точки ф-ции Лагранжа, т. е. решить систему {; 3) определить знак приращения Δz в окрестности критических точек по тем точкам окрестности, которые удовлетворяют уравнению связи . **Нахождение наименьшего и наибольшего значений ф-ции двух переменных в области** Для ФНП **справедлива теорема Вейерштрасса. Т 4 [Вейерштрасса].** Если ФНП непрерывна в замкнутой ограниченной области, то она ограничена в этой области и достигает в ней наибольшего и наименьшего значений. Эти значения достигаются либо в точках локального экстремума, расположенных внутри области, либо на границе этой области. Для нахождения наибольшего и наименьшего значений ФНП в области нужно: 1) найти критические точки ф-ции и выбрать те, которые входят в область; 2) найти наименьшее и наибольшее значения ф-ции на границе области; 3) сравнить все найденные значения ф-ции и выбрать из них наименьшее и наибольшее.

**14. Комплексные числа и действия над ними...** Для комплексного числа существует 3 формы записи: **1.** **алгебраическая z=x+iy , где x,y∈R , = −1** (i - мнимая единицей);**2. тригонометрическая** z=r(cosϕ+ isinϕ), где r=|z| – модуль комплексного числа z; ϕ = arg z – аргумент комплексного числа z;**3. показательная z =r .**Связь между тригонометрической и показательной формами записи комплексного числа определяется **формулой Эйлера cosϕ+ isinϕ.**Действительные числа Re z=x, Im z =y называются соответственно **действительной и мнимой частями комплексного числа z**. Связь между алгебраической и тригонометрической формами записи комплексного числа z выражается формулами: r=; Значение arg z = ϕ удовлетворяющее условию 0 ≤ ϕ < 2π (−π < ϕ ≤ π), называется главным значением аргумента. Все значения аргумента находятся по формуле Argz=argz + 2πk, k∈Ζ. Число =x-iy = − называется комплексно сопряженным числу z =x+iy и изображается на комплексной плоскости точкой, симметричной точке z относительно действительной оси. При сложении комплексных чисел складываются их действительные и мнимые части соответственно: если то Сложение комплексных чисел равносильно сложению соответствующих векторов . При умножении комплексных чисел их модули умножаются, а аргументы складываются: если ,то . Корни n-й степени из комплексного числа вычисляются по формуле =(. Существует ровно n различных комплексных корней n-й степени из комплексного числа z. Геометрически точки, соответствующие различным значениям корня n-й степени из комплексного числа z, располагаются на окружности радиуса с центром в начале координат и делят эту окружность на n равных частей, причем один из корней имеет аргумент 1/n arg z.

**15. Понятие функции комплексной переменной. Однозначные и многозначные функции.**Пусть D, E – некоторые множества комплексных чисел. **Опр. 1.** Если каждому числу z=x+iy∈D по некоторому правилу f поставлено в соответствие одно или несколько комплексных чисел w=u+iv∈E , то на множестве D определена ф-ция w = f (z), принимающая значения из множества E. **Опр. 2.** Ф-ция w=f(z) называется **однозначной,** если каждому значению z соответствует одно значение w, и многозначной, если каждому значению z соответствует несколько значений w**.** Для комплексного числа z=x+iy∈С используются понятия: Re y=x – действительная часть числа z; Im z=y – мнимая часть числа z. Аналогично для ф-ции комплексной переменной w=f(z)=u+iv=u(x;y)+ iv(x;y) : Re f(z) =u(x;y) – действительная часть ф-ции f(z); Im f(z)=v( x;y ) – мнимая часть функции f (z). **Основные элементарные функции комплексной переменной**: I. степенная функция ; II. показательная функция ; III. логарифмическая функция ; IV. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции. **1) Степенная функция** , w = n∈N, определяется с помощью операции умножения комплексных чисел. Ф-ция однозначная. **2) Степенная функция** w = n∈N, определяется с помощью операции извлечения корня n-й степени из комплексного числа. Каждому комплексному числу z ≠ 0 соответствует ровно n различных комплексных значений w, поэтому эта функция многозначная (функция n-значная). **II. Показательная функция** w = определяется формулой =(cosy+i siny ), где z =x +iy :1. Функция однозначная. 2. ≠ 0 при всех z∈C. 3.\* ;4. = т. е. функция является периодической с мнимым периодом T = 2πi .II**I. Логарифмическая функция определяется как функция, обратная к показательной**:w=Ln z ⇔ =z. Пусть w=u+iv .Для переменной z используем показательную форму записи комплексного числа z=r ,где r=|z| , ϕ = arg z. Тогда ⇔ ⋅ ⇔ ;;Следовательно, w( ,k∈Z. 1.Ф-ция многозначна. Значение lnz=ln|z|+i\*arg z называется главным значением логарифма. 2. Область определения z ≠ 0. 3. Справедливы следующие соотношения: Ln( )=Ln LnLn -Ln; Ln LLnz ; I.3) Общая степенная ф-ция w= , где α∈C, определяется для всех z ≠ 0 соотношением w= .Функция многозначна, ее главное значение .II. 2) Общая показательная функция , w = где α ∈C, α ≠ 0, определяется соотношением w=Ф-ция многозначна, ее главное значение IV. Тригонометрические функции. Косинус и синус комплексной переменной определяются формулами cosz= ; sinz= ;1. Ф-ции однозначные. 2. Периодические с периодом T = 2π . 3. cosz=0 ⇔ z= + πk,k ∈Ζ; sinz= 0 ⇔ z= πk,k∈Ζ ;4. Функции косинус и синус комплексной переменной не являются ограниченными. Тангенс и котангенс комплексной переменной определяются формулами tgz=sinz/cosz ; cigz= cosz/sinz: 1. Функции однозначные. 2. Периодические с периодом T = π. Гиперболический косинус и гиперболический синус определяются формулами chz= ; shz= :1.Функции однозначные. 2. Периодические с периодом T = 2πi .3. ch iz=cosz ;sh iz=i sin z. Гиперболический тангенс и гиперболический котангенс определяются формулами thz=sh z/ch z;cth z =chz/sh z. 1. Функции однозначные. 2. Периодические с периодом T=πi . 3. th (iz)=itg(z);cth(iz)=-i\*ctg(z) iz ;V. Обратные тригонометрические и обратные гиперболические ф-ции многозначны. Поскольку арксинус – функция, обратная к функции синус, то w = arcsin z⇔ z= sin w . Тогда = 0  
Обозначив s = имеем квадратное уравнение izs−1 =0 , решая которое, получим: D=4+4 =4-4; s=iz s=iz; iz*iw=Ln(iz+*

**16. Производная функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана. Понятие аналитической функции. Опр. 1**. Пусть однозначная ф-ция w=f(z) определена в некоторой окрестности точки , включая эту точку. Производной ф-ции w =f(z) в точке называется предел, если он существует и конечен, отношения приращения ф-ции к приращению аргумента, когда последнее стремится к 0: ;**Опр. 2.** Ф-ция f(z) называется дифференцируемой в точке , если в этой точке существует производная f′().Eсли f(z) дифференцируема в точке , то она непрерывна в этой точке. Обратное неверно. **Т 1.** Пусть ф-ция f(z )=u(x;y)+iv(x;y) определена в некоторой окрестности точки и ф-ции u(x;y), v(x;y) дифференцируемы в точке (;). Тогда: f(z) дифференцируема в точке ⇔ { в точке (;. **Условия называются условиями Коши-Римана**. Докажем, что если f(z) дифференцируема в точке , то для f(z) в этой точке выполняются соотношения. Если f(z) дифференцируема в точке , то существует при этом Δz = Δx +iΔy стремится к 0 любым способом. Пусть Δz = Δx. Тогда =*;*Пусть Δz =iΔy (т. е. Δ = x 0, изменяется только мнимая часть числа z). В этом случае Поскольку существует f′(), то результаты в обоих случаях должны совпадать: .Доказали необходимость выполнения условий в точке для дифференцируемости ф-ции f(z) в этой точке. С учетом условий Коши-Римана производную дифференцируемой ф-ции f(z) можно находить по любой из следующих четырех формул: f(z)’=;f’(z)= **Опр. 3**. Однозначная функция f(z) называется аналитической в открытой области D, если она дифференцируема в каждой точке этой области. **Опр. 4**. Функция f(z) называется аналитической в точке , если она аналитична в некоторой окрестности точки , т. е. если она дифференцируема в некоторой окрестности точки . **Опр. 5**. Точки, в которых однозначная функция f(z) аналитична, называются правильными точками f(z). Опр. 6. Точки, в которых функция не является аналитической, называются особыми точками этой функции. Правила дифференцирования ф-ций действительной переменной остаются справедливыми и для ф-ций комплексной переменной, в частности: ((z)(z))’=’ (z)(z); ((z)(z))’=’ (z)(z)+ (z)(z); ;(f(ϕ(z)))’= z))′(z). Важным свойством аналитических функций является также их бесконечная дифференцируемость. Если функция комплексной переменной аналитична в некоторой области, то она имеет в этой области производные любого порядка, которые также являются аналитическими функциями.

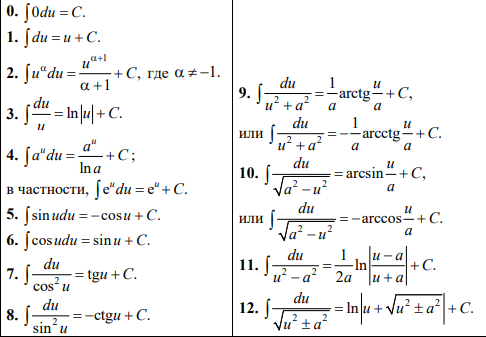
**17. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексной переменной…**   
**Геометрический смысл производной функции комплексной переменно.** Пусть функция w=f(z) аналитична в точке , причем f’()≠0. Выясним геометрический смысл модуля и аргумента производной. По определению, f’(.Пусть точка z=+Δz стремится к по некоторой кривой l. Тогда соответствующая точка w= + Δw будет стремиться к точке f() по кривой L, которая является образом кривой l при отображении w= f (z).Если обозначить Δz= Δ r ; Δw= Δρ, f’(=k, то f’()= k= причем – угол наклона касательной к кривой l в точке ; – угол наклона касательной к кривой L в точке . Поэтому f’()= k следовательно, |f’()|= k Таким образом, если функция w=f(z) аналитична в точке , причем f′() ≠0, то

1)модуль производной в точке показывает, во сколько раз увеличиваются расстояния в окрестности точки при отображении w=f(z), причем коэффициент растяжения k не зависит от вида и направления кривой l (это свойство называется свойством постоянства растяжения);   
2) аргумент производной в точке показывает, на какой угол поворачивается при отображении w= f (z) касательная к кривой, проходящей через точку , причем этот угол α не зависит от вида и направления кривой l (это свойство называется свойством сохранения углов (или консерватизма углов)). В этом случае угол между любыми двумя кривыми l1 и l2, пересекающимися в точке , равен по величине и направлению отсчета углу между кривыми L1 и L2, которые являются соответственно образами линий l1 и l2 при отображении w=f(z). Опр. 1. Отображение w =f(z), обладающее в точке свойствами постоянства растяжения и сохранения углов, называется конформным (т. е. «сохраняющим форму») в точке . Т 1. Отображение w = f(z) является конформным в точке 0z тогда и только тогда, когда функция w= f(z) является аналитической в точке и f′( ) ≠0/ Опр. 2. Отображение w= f(z) называется конформным в области D, если оно является конформным в каждой точке этой области. Конформные отображения позволяют свести изучение сложных областей и линий к более простым.  
Отметим некоторые свойства конформных отображений.   
Т 2 [Риман]. Каковы бы ни были две односвязные области D на плоскости (z) и E на плоскости (w), существует аналитическая функция w = f(z), отображающая взаимно однозначно и конформно область D на область E. Замечание. Область D ⊆ C называется односвязной, если ее граница состоит из одной замкнутой кривой.

При этом при отображении с помощью аналитической функции: 1) внутренние точки области переходят во внутренние, а граничные точки – в граничные; 2) сохраняется направление обхода границы. В следующем утверждении указаны условия, задание каждого из которых достаточно для однозначного определения конформного отображения данных областей. Утв. 1. Пусть область D на плоскости (z) имеет границу l, а область E на плоскости (w) – границу L и пусть существует конформное отображение w=f (z) области D на область E. Тогда если выполняется одно из следующих условий нормировки: 1) f ()= , arg f’(= α для заданных внутренних точек D ,w∈ E и заданного угла α; 2) f( ) = для заданных внутренних точек ∈D ,∈E и f( ) =для заданных граничных точек ∈l,∈L; 3) f( ) = для заданных граничных точек ∈l, ∈L то данное конформное отображение единственно

**18. Первообразная и неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблица неопределенных интегралов. Опр. 1.** Функция F(x) называется первообразной **для** ф-ции f(x) на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка F’(x)=f(x). Т 1. Если F(x) – первообразная для ф-ции f(x) на некотором промежутке, то множество всех первообразных для функции f(x) на этом промежутке задается формулой F(x) +C, где C = const – произвольная постоянная. Доказательство. 1) Докажем, что функция F(x)+C является первообразной для f(x). Очевидно, ( F(x)+C )’= F’(x) +0=f(x) 2) Пусть G(x) – некоторая другая первообразная для f(х) на данном промежутке. Тогда для любого x из этого промежутка (G(x)- F(x))’=f(x)-f(x)=0⇒ G(x)- F(x)=C= const, откуда G(x)=F(x) +C. **Опр. 2.** Множество всех первообразных для ф-ции f(x) на некотором промежутке называется неопределенным интегралом от функции f(x) (на этом промежутке) и обозначается = F(x)+C . f(x) -подынтегральная ф-ция, f(x)dx – подынтегральное выражение, x – переменной интегрирования. Операция нахождения неопределенного интеграла называется интегрированием. Интегрирование представляет собой операцию, обратную дифференцированию. **Основные свойства неопределенного интеграла** 1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению: ( ∫f(x)dx)’ =f(x) , d( ∫f(x)dx)’ =f(x)dx Доказательство. ( ∫f(x)dx)’ =(F(x)+C)’= F’(x)=f(x); d( ∫f(x)dx)’ =( ∫f(x)dx)’ dx=f(x)dx 2.Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной: ∫ dF(x)=F(x)+C . Доказательство. ∫ dF(x)= ∫ F(x)dx=F(x)+C. 3.Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла: ∫kf(x)dx =k∫f(x)dx, k ≠ 0 – постоянная. Доказательство. ∫kf(x)dx =∫kF’(x)dx=∫(kF (x)) ’dx= kF(x)+C=k(F(x)+ 5.Неопределенный интеграл от суммы (разности) интегрируемых функций равен сумме (разности) интегралов этих функций: ∫(f(x) ± g(x))dx=∫f(x) dx ± ∫g(x))dx 5. Инвариантность формулы интегрирования: любая формула интегрирования сохраняет свой вид, если переменную интегрирования заменить любой дифференцируемой функцией этой переменной: ∫f(x)dx=F(x) +C ⇒ ∫f(u)du=F(u) +C, где u= u(x) – произвольная функция, имеющая непрерывную производную. Доказательство. Пусть u= u(x) – дифференцируемая функция, имеющая непрерывную производную. Для сложной функции F(u) в силу свойства инвариантности дифференциала 1-го порядка имеем dF(u)=F’(u)du=f(u)du , поэтому ∫f(u)du=∫d(F(u))=F(u) +C 6. Если F(x) – первообразная для функции f(x), a, b – числа, a ≠ 0, то ∫f(ax+b)dx= Доказательство. Положим u=ax+b , тогда du=d(ax+b)=(ax+b)’dx=adx , откуда dx=d(ax+b) и ∫f(ax+b)dx=

Таблица основных неопределенных интегралов Пусть u=u(x) – дифференцируемая функция, имеющая непрерывную производную.



**19. Интегрирование по частям и заменой переменной в неопределенном интеграле.***1.Непосредственное интегрированиею.* Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции с использованием основных свойств неопределенного интеграла сводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется непосредственным интегрированием. Произвольная постоянная записывается при этом не каждый раз при нахождении интеграла от суммы, а лишь один раз, когда исчезает знак последнего интеграла в сумме.*2. Внесение множителя под знак дифференциала.* Часто при вычислении интегралов пользуются приемом подведения функции под знак дифференциала. Связь дифференциала и производной выражается формулой u’(x)dx=d(u(x)).   
Переход от левой части этого равенства к правой называют подведением множителя u’(x) под знак дифференциала. Это позволяет с помощью свойства инвариантности формул интегрирования найти интеграл вида ∫f(u(x))u’(x)dx= ∫f(u)du=F (u)+C=F (u(x))+ C. С учетом определения неопределенного интеграла формулу иногда бывает полезно переписать в виде f(x)dx=d (∫f(x)dx); Полезно также иметь в виду свойства дифференциала: 1) постоянный множитель можно выносить за знак дифференциала: d(au)=adu ;2) дифференциал не изменяется, если к функции прибавить постоянную: d(u+b)= du. Следовательно где a, b – числа, a ≠ 0.*3. Замена переменной в неопределенном интеграле.* Метод замены переменной состоит в переходе к новой переменной с помощью некоторой подстановки. При этом исходный интеграл стремятся преобразовать в интеграл, метод интегрирования которого известен. В конце решения обязательно возвращаются к исходной переменной. Т 1. Пусть функция y = f(x) непрерывна на некотором промежутке X, а функция x= ϕ(t):T → X непрерывно дифференцируема и имеет непрерывную обратную функцию t= . Тогда ∫f(x)dx=∫f(ϕ(t))ϕ′(t)dt (4). Доказательство. Найдем дифференциалы левой и правой частей, учитывая, что f(x)=f (ϕ(t)) – сложная функция: d(∫f(x)dx)=f(x)dx=f(ϕ(t))d(ϕ(t))= f(ϕ(t))ϕ’(t)dt ; d(∫f(ϕ(t))ϕ’(t)dt)= f(ϕ(t))ϕ’(t)dt .Так как при дифференцировании обеих частей формулы получаются одинаковые выражения, то равенство интегралов имеет место.Формула (4) может использоваться как слева направо, так и справа налево. Прочтение формулы (4) справа налево – это фактически метод поднесения множителя под знак дифференциала. **4. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.** Пусть функции u(x) и v(x) непрерывно дифференцируемы. Тогда поскольку (uv)’= u’v+’vu , то d(uv)=vdu+udv. Проинтегрируем это равенство: ∫d(uv)= ∫vdu+ ∫udv. Учитывая, что ∫d(uv)= uv+C , получим формулу ∫udv=uv- ∫vdu которая называется формулой интегрирования по частям в неопределенном интеграле. Ее целесообразно применять, когда интеграл в правой части проще, чем интеграл в левой. Постоянную интегрирования в формуле не записывают, так как в правой части находится неопределенный интеграл, содержащий произвольную постоянную. Практическое применение метода интегрирования по частям заключается в том, что подынтегральное выражение представляют в виде произведения функции u и дифференциала dv (последний обязательно содержит dx ). При переходе к правой части формулы первый множитель дифференцируется, а второй интегрируется: du=u’dx; v= ∫dv .Разбиение подынтегрального выражения на множители осуществляется так, чтобы получить в правой части формулы более простой интеграл. Метод интегрирования по частям удобно применять для вычисления интегралов следующих стандартных типов: 1) интегралы вида ∫ (x)dx, ∫ (x)dx, ∫ (x)coskxdx, ∫ (x)sinkxdx, где – многочлен степени n; k ∈Ρ 2) интегралы вида ∫ (x)ln kxdx, ∫ (x)arccos kxdx , ∫ (x)arcsin kxdx , ∫ (x)arctg kxdx , ∫ (x)arcctg kxdx где – многочлен; k ∈R; 3) интегралы вида ∫dx, ∫ sin bxdx, ∫ cos(lnx)dx, ∫sin(lnx)dx, ∫ dx, ∫ dx, ∫ dx, где a,b, ∈R применение к которым формулы интегрирования по частям приводит к уравнению, из которого можно выразить исходный интеграл (при нахождении первых четырех интегралов формула интегрирования по частям применяется дважды, причем в интегралах вида ∫dx, ∫ sin bxdx за u оба раза нужно взять функцию одного типа, т. е. либо оба раза либо оба раза тригонометрическую функцию)**.**Помимо трех стандартных типов, существует много других интегралов, для которых метод интегрирования по частям весьма эффективен.

**20. Алгоритм интегрирования рациональных дробей. Интегрирование простейших рациональных дробей. Опр. 1.** Рациональной функцией (или рациональной дробью) называется функция, равная отношению двух многочленов, т. е. дробь вида где ( – многочлен степени n, а – многочлен степени m. Опр. 2. Рациональная дробь называется правильной, если степень числителя строго меньше степени знаменателя (n<m); рациональная дробь называется неправильной, если степень числителя больше или равна степени знаменателя (n≥m). Любую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби. Для этого нужно числитель поделить уголком на знаменатель.**Опр. 3.** Простейшими, или элементарными, рациональными дробями называются правильные дроби следующих четырех типов: I. ;II. (k ∈Ν,k ≥2) III. () IV. (; k ∈ Ν,k 2). Интегрирование простейших дробей I и II типов осуществляется с помощью замены t=x-a : ∫ ∫=A ln|x-a|+C**;** ∫dx= A∫ d(x-a)= ;Интегралы от простейших дробей III типа, а также интегралы вида ∫dx , ∫dx; берутся посредством выделения полного квадрата в знаменателе и замены t=x+; Интегралы от простейших дробей IV типа путем выделения полного квадрата в знаменателе и замены преобразуются к сумме двух интегралов:

∫x=∫x=|t=x+

Обозначим ;Интегрирование простейших дробей IV типа сводится к вычислению интегралов вида ;Первый из них легко берется поднесением под знак дифференциала: ;Нахождение интеграла после преобразования и применения формулы интегрирования по частям сводится к нахождению интеграла с меньшей степенью в знаменателе. ;Т 1. Всякую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы простейших рациональных дробей, причем это разложение определяется однозначно: если знаменатель дроби имеет вид (1), то дробь раскладывается в сумму простейших дробей следующим образом: В разложении линейным множителям знаменателя соответствуют простейшие дроби I и II типов, а квадратичным множителям – дроби III и IV типов, причем число дробей, соответствующих данному множителю, равно степени, с которой этот множитель входит в разложение (1).  
При нахождении числовых значений неопределенных коэффициентов разложения (2) обычно используют метод неопределенных коэффициентов или метод частных значений, иногда их комбинацию. Алгоритм интегрирования рациональных дробей Сформулируем общее правило интегрирования рациональных дробей в виде следующего алгоритма. 1. Если рациональная дробь является неправильной, представить ее в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, разделив числитель на знаменатель уголком. 2. Разложить знаменатель полученной правильной рациональной дроби на неприводимые множители (линейные и квадратичные, не имеющие действительных корней). 3. Записать с неопределенными коэффициентами разложение полученной правильной рациональной функции на сумму простейших дробей. 4. Найти неопределенные коэффициенты. 5. Проинтегрировать рациональную функцию, представленную в виде суммы многочлена и простейших рациональных дробей по стандартным правилам интегрирования.

**21. Интегрирование функций, рационально зависящих от тригонометрических. Универсальная тригонометрическая подстановка.** Интегралы вида ∫sin(ax)cos(bx)dx , ∫cos(ax)cos(bx)dx, ∫sin(ax)sin(bx)dx .Для вычисления таких интегралов используют формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму: sincos coscos sin Интегралы вида ∫ (m,n∈Z, m, n≥0) Для нахождения таких интегралов используются следующие приемы: 1) замена t = cosx , если m – нечетное; 2) замена t= sinx , если n – нечетное; 3)если m=2k, n=2l (обе степени m и n четные), то применяются формулы понижения степени ,;  
**Универсальная тригонометрическая подстановка** **Опр. 1.** Рациональной функцией R(u;v;w;...) нескольких переменных u,v,w ... называется функция, которая получается из переменных u,v, w ... и действительных чисел с помощью четырех арифметических действий. **Утв.** 1. Универсальная тригонометрическая подстановка t =tg всегда сводит интеграл вида ∫ R(sin x; cos x)dx к интегралу от рациональной функции. Действительно, выражая x, получим x=2arctg(t)⇒ dx = Функции sin x и cos x рационально выражаются через t =tg: sinx=2sincos =2tgcosx=-=;Таким образом, t =tg cosx=Частные тригонометрические подстановки : 1) если функция R(sinx ; cosx ) нечетна относительно sinx, т. е. R(sin x; -cos x)= -R(sinx; cos x),то используется подстановка t= cosx ; 2) если функция R(sinx ; cosx ) нечетна относительно cosx , т. е. R(sinx ; -cosx )=-R(sinx ; cosx ), то используется подстановка t= sinx ; 3) если функция R(sin x; cos x) является четной по совокупности аргументов, т. е. R(-sin x;-cos x)=R(sinx ; cosx ), то используется подстановка t = tgx или t = ctgx . Во многих случаях подстановку можно осуществить поднесением множителя под знак дифференциала, не вводя новых обозначений.В интегралах , ∫ ∫ удобно применять универсальную тригонометрическую подстановку

**22. Интегралы вида ∫R(x;(ax+b;(ax+b**

Интегралы вида ∫ **R(x;;** где – целые , – натуральные числа, рационализируются подстановкой , x = ,где s – наименьшее общее кратное чисел (или, иначе говоря, s – наименьший общий знаменатель дробей ). Аналогично в более общем случае: интегралы вида ∫R(x;(ax+b;(ax+b

берутся подстановкой , ax+b= ,а интегралы вида ∫R(x;(;( берутся подстановкой , , где s – наименьшее общее кратное чисел (Здесь a,b,c,d∈R;, ... ; ∈Ζ; ∈Ν )

**23. Интегралы вида ∫ R(x; ) .**

Тригонометрические подстановки позволяют свести интегралы, содержащие корень из квадратного трехчлена, к интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических.

|  |  |
| --- | --- |
| Интегралы вида | берутся подстановкой |
| ∫ R(x; ) | X=a\*sin(t) или x=a\*cos(t) |
| ∫ R(x; ) | X=a\*tg(t) или x=a\*ctg(t) |
| ∫ R(x; ) | X= или X= |

Интегралы вида **∫ R(x; ) ,** где a, b, c сводятся к случаю III путем выделения полного квадрата и замены t=x+

**24. Понятие и примеры неберущихся интегралов. Т1 [Коши**]. Всякая непрерывная на промежутке (a;b ) ф-ция f(x) имеет на этом промежутке первообразную F(x). Однако не всегда первообразная F(x) является элементарной функцией. **Опр. 1.** Интеграл ∫f(x)dx называется неберущимся, или не выражающимся в элементарных функциях, если первообразная для функции f (x) не является элементарной функцией. Интеграл от любой рациональной дроби выражается через элементарные функции. Приведем примеры неберущихся интегралов. В 1853 г. П. Л. Чебышев доказал, что интеграл от дифференциального бинома ∫ dx, за исключением указанных Л. Эйлером трех случаев (число p – целое, или m+1/ n – целое, или v – целое) не выражается в элементарных функциях.

Известно также, что интегралы вида ∫ берутся только если α – натуральное число или α = 0. Другие примеры неберущихся интегралов: – ∫ – интеграл Пуассона (играет важную роль в теории вероятностей); –∫sin dx; ∫cosdx – интегралы Френеля (используется в физике); – ∫ – интегральный логарифм (используется в теории чисел); – ∫dx=si(x); ∫ dx=ci (x) – интегральные синус и косинус;

∫ – эллиптический интеграл I рода; -∫dx эллиптический интеграл II рода.

**25. Понятие определенного интеграла, его геометрический смысл. Условия интегрируемости функций.** Пусть ф-ция y=f(x) определена и ограничена на отрезке [a;b]. Разобьем отрезок [a;b] на n частичных отрезков точками где a< < <…< обозначим через Δ длину частичного отрезка [;]; возьмем на каждом частичном отрезке произвольную точку ∈ [;] и составим сумму , которая называется **интегральной суммой** для функции f(x) на отрезке [a;b].Обозначим длину наибольшего частичного отрезка через maxΔx величина называется **диаметром разбиения {, ,,..., }.Опр. 1.** Определенным интегралом от функции f(x) на отрезке [a;b]называется предел интегральной суммы при измельчении разбиения, т. е. при диаметре разбиения, стремящемся к нулю: при условии, что этот предел существует, конечен и не зависит ни от способа разбиения отрезка [a;b] на частичные отрезки, ни от выбора промежуточных точек i c на частичных отрезках. Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования; функция f(x) – подынтегральной функцией; f(x) dx – подынтегральным выражением; отрезок [a;b] – отрезком интегрирования**. Опр. 2.** Если существует определенный интеграл от функции f(x) на отрезке [a;b], то функция f(x) называется интегрируемой на отрезке [a;b]. **Т 1** **(необходимое условие интегрируемости).**Если функция f(x) интегрируема на [a;b], то она ограничена на [a;b]. Т 2 (достаточное условие интегрируемости). Если функция f(х) непрерывна на [a;b], то она интегрируема на [a;b]. Т 3 (достаточное условие интегрируемости). Если функция f(x) ограничена на отрезке [a;b] и непрерывна на нем всюду, кроме конечного числа точек разрыва 1-го рода, то она интегрируема на [a;b].С геометрической точки зрения, определенный интеграл от неотрицательной функции f(x) по отрезку [a;b] равен площади криволинейной трапеции, т. е. фигуры, ограниченной сверху графиком функции y = f(x), снизу осью Ox, сбоку – прямыми x=a и x=b: . **Физический смысл определенного интеграла.** 1.Работа переменной по величине силы F(x), действующей вдоль оси Ox от точки x=a до точки x=b , равна определенному интегралу по отрезку [a;b] от величины силы: 2. Если неотрицательная функция γ(x) выражает линейную плотность стержня в каждой точке x∈[a;b], то масса неоднородного стержня равна определенному интегралу по отрезку [a;b] от плотности: m =. 3. Путь, пройденный материальной точкой за промежуток времени от t=a до t =b , равен определенному интегралу от скорости: m = .

**26. Основные свойства определенного интеграла…  
Основные свойства определенного интеграла** 1. По определению полагают 2. Линейность определенного интеграла: (k= const); ± ; Доказательство. 3.Аддитивность определенного интеграла: Это свойство справедливо при любом расположении точек a, b, c друг относительно друга. 4. Если f(x)0 при всех x∈[a;b], то 0.Доказательство следует из определения определенного интеграла, поскольку 5. Монотонность определенного интеграла: если f(x) ≥ g(x) при всех x∈[a;b], то .6. | (если a<b ). Доказательство. Применяя свойство 5 к очевидным неравенствам −|f(x)| ≤f(x) ≤ |f (x)| , получаем -а значит, | |≤;7. Оценка определенного интеграла: если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции f(x) на отрезке [a;b] и f(x) интегрируема на [a;b], то m(b-a) ≤. 8. (теорема о среднем для определенного интеграла). Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a;b], то существует такая точка c∈[a;b], что .Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a;b], то по теореме Вейерштрасса она ограничена на [a;b], т. е. существуют такие m и M, что m ≤f(x) ≤ M при всех x∈[a;b].Тогда m(b-a) ≤m**.**Обозначим C = .Это значение расположено между m и M. Найдется такая точка c∈[a;b], что Теорема о среднем имеет простой геометрический смысл для неотрицательной на отрезке [a;b] функции f(x) : площадь криволинейной трапеции равна площади прямоугольника, построенного на отрезке [a;b] и имеющего высоту f(c) при некотором c∈[a;b].

**27. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.** Пусть функция f(x) интегрируема на [a;b]. Тогда для каждого x∈[a;b] определен интеграл и можно рассмотреть функцию F(x)= определенную на отрезке [a;b], – интеграл с переменным верхним пределом. **Т 1.** Если f(x) непрерывна на отрезке [a;b], то существует F’(x)==f(x) т. е. производная интеграла функции f(x) по переменному верхнему пределу равна значению подынтегральной функции в точке, равной верхнему пределу. Доказательство. По определению производной,F’(x)=; Рассмотрим приращение функции. В силу свойства аддитивности определенного интеграла и теоремы о среднем получим при некотором c, лежащем между x и x+xΔ . Следовательно, F’(x)= поскольку при Δx→ 0 точка c, лежащая между x и x+ Δx , стремится к точке x, а функция f(x) непрерывна по условию. Если f(x) непрерывна на отрезке [a;b], то она имеет первообразную на этом отрезке; в частности, интеграл с переменным верхним пределом F(x)= является первообразной для функции f(x) на отрезке [a;b ]. **Формула Ньютона-Лейбница**. Пусть функция f(x) непрерывна на [a;b], а F(x) – какая-либо первообразная для f(x) на этом отрезке. Тогда и F(x)– две первообразные для функции f(x), а значит, они отличаются только на постоянное слагаемое, т. е. При x=a получим т.е. F(a)+C=0, откуда C=-F(a). При x=b получим Таким образом, если функция f(x) непрерывна на [a;b], то где F(x) – какая-либо первообразная для f(x) на этом отрезке. Эта формула называется формулой Ньютона-Лейбница. Она выражает связь между определенным и неопределенным интегралами и является основным методом вычисления определенного интеграла.

Интегрирование по частям в определенном интеграле

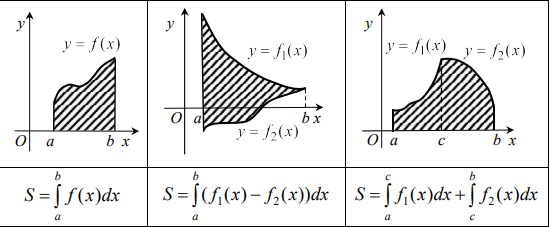
**28. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле… Т 2.** 1) Если функция x=ϕ(t) непрерывна и имеет непрерывную производную на отрезке[ ; ]; 2)ϕ( =a,ϕ(=b, и множеством значений функции ϕ(t) на отрезке [;] является отрезок [a;b];3) функция f(x) непрерывна на [a;b],тогда При замене переменной в определенном интеграле необходимо пересчитывать пределы интегрирования, чтобы их значения соответствовали новой переменной, но не нужно возвращаться к исходной переменной.**Свойства интегралов от четных и нечетных функций по симметричному относительно 0 промежутку** Утв. 1. 1) Если f(х) – четная функция, т. е. f (-х)= f (x), то 2) если f(x) – нечетная функция, т. е. f (-х)= f (x), то . Доказательство. 1) По свойству аддитивности

В первом интеграле сделаем замену t = − x:

**29. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования. Признаки сравнения. Примеры сходящихся и расходящихся интегралов.** Несобственный интеграл является обобщением понятия определенного интеграла на случай бесконечного промежутка интегрирования или неограниченной подынтегральной функции. Основная идея построения несобственного интеграла: отступить от особенности внутрь отрезка интегрирования, а затем перейти к пределу. Опр. 1. Пусть функция f(x) интегрируема на любом отрезке [a;B], где B≥a . Несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом называется предел причем если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае – расходящимся. Пример 1. Исследуем сходимость несобственного интеграла , т. е. несобственный интеграл расходится.  **Опр. 2**. Если функция f(x) интегрируема на любом отрезке [A ;b ], где A ≤b , то несобственным интегралом с бесконечным нижним пределом называется предел причем если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае – расходящимся. **Опр. 3**. Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами интегрирования определяется как сумма причем несобственный интеграл называется сходящимся, если оба интеграла в правой части равенства сходятся, и расходящимся в противном случае.В некоторых случаях для интеграла , который расходится, рассматривают его сходимость в смысле главного значения v.p. ;(Это понятие и обозначение «v.p.» (от фр. valeur principale – главное значение) ввел О. Коши.) Если несобственный интеграл сходится, то он сходится и в смысле главного значения. Обратное утверждение неверно. Если несобственный интеграл расходится, то в смысле главного значения он может как сходиться, так и расходиться.Признаки сравнения несобственных интегралов 1-го рода **Т 1.** Пусть ф-ции f(x) и g(x) интегрируемы на любом конечном промежутке, содержащемся в [ a;+∞) и 0 ≤ f(x)≤g(x) при всех x∈[a ; + ∞ ). Тогда из сходимости интеграла следует сходимость интеграла , из расходимости интеграла следует расходимость интеграла .**Т 2.** Пусть функции f(x) и g(x) интегрируемы на любом конечном промежутке, содержащемся в [a; + ∞ ); f(x)>0, g(x)>0 при всех x ∈ [a; + ∞) и существует конечный, отличный от 0 предел g ( A ≠0, ≠ ∞). Тогда несобственные интегралы и ведут себя в смысле сходимости одинаково, т. е. либо оба сходятся, либо оба расходятся. **Т3.** Если сходится, то и сходится.

**30. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Признаки сравнения. Примеры сходящихся и расходящихся интегралов.**Пусть функция f(x) интегрируема на любом отрезке, содержащемся в [a;b), и в точке b имеет бесконечный разрыв (т. е. ). В этом случае говорят, что функция f(x) имеет особенность в точке x =b , а саму точку x =b называют особой точкой. **Опр. 4.** Пусть функция f(x) интегрируема на любом отрезке, содержащемся в [a;b), и в точке b имеет особенность. Несобственным интегралом 2-го рода от функции f(x) на промежутке [a;b) называется предел причем если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.Пусть функция f(x) интегрируема на любом отрезке, содержащемся в (a;b], и в точке a имеет особенность ( ). Несобственным интегралом 2-го рода от функции f(x) на промежутке (a;b] называется предел причем если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.Опр. 6. Пусть функция f(x) имеет бесконечный разрыв (особенность) в точке c∈[a;b] и интегрируема на любых отрезках, содержащихся в [a;c) и (c ;b ]. Несобственный интеграл 2-го рода от функции f(x) на промежутке [a;b] определяется как сумма причем несобственный интеграл называется сходящимся, если оба интеграла в правой части равенства сходятся, и расходящимся в противном случае. Для расходящегося интеграла от функции, имеющей особенность в точке c ∈[a;b ] вводится понятие главного значения по формуле v.p Признаки сравнения для несобственных интегралов:1.Пусть функции f(x) и g(x) интегрируемы на любом конечном промежутке, содержащемся в [a;b),и 0≤f(x) ≤g (x) при всех x ∈[a;b). Тогда: – из сходимости интеграла следует сходимость интегралa – из расходимости интеграла следует расходимость интеграла .

**31. Геометрические приложения определенного интеграла.**

****

В некоторых случаях удобнее интегрировать по переменной y.Если криволинейная трапеция на отрезке [a;b] ограничена снизу осью Ox (прилежит к оси Ox), а сверху линией, заданной параметрически: то, выполнив замену в интеграле . получим следующую формулу , где x(t1)=a; x(t2)=b. **Вычисление длин дуг кривых:** Пусть функция y = f(x) и ее производная f′(x) непрерывны на отрезке [a;b]. Разобьем отрезок [a;b] на n частичных отрезков точками где = = b.Пусть этим точкам соответствуют точки на кривой . Проведем отрезки − Если длины всех частичных отрезков [ ; ] стремятся к 0, то длина ломаной приближается к длине дуги кривой. Обозначим длину частичного отрезка [ ; ] через Δ = приращение функции на отрезке [ ; ] равно Δ=f(; длина отрезка может быть выражена по теореме Пифагора как Δ = . По теореме Лагранжа Δ=f(− f()=f’ при некотором c∈[ ; ] поэтомуΔ = =**;**Обозначив диаметр разбиения через max, получаем, что длина дуги кривой равна пределу l= т. е. пределу интегральной суммы для функции на отрезке [a;b]. Следовательно, **.**Если кривая задана параметрически уравнениями , причем функции x(t),y (t) и их производные непрерывны на отрезке [t1;t2] и x′(t) ≠0 при t ∈[t1;t2], то по правилу дифференцирования параметрически заданной функции имеем f’(x)= , поэтому =.Учитывая, что dx= x’( t)dt , получим формулу

l= причем здесь всегда t1 <t2.

**Вычисление объемов пространственных тел по известным площадям поперечных сечений:** Пусть пространственное тело ограничено плоскостями x =a и x =b и известна функция S(x), выражающая площадь сечения этого тела плоскостью x = const, причем функция S(x) непрерывна на отрезке [a;b]. Как и раньше, разобьем отрезок [a;b] на n частичных отрезков точками где = b. Если длины всех частичных отрезков достаточно малы, то каждый слой тела, отвечающий отрезку [ ; ], можно рассматривать приблизительно как цилиндр с основанием S() при некотором [; ] и высотой Δ = −. Измельчая диаметр разбиения maxΔ →0, получаем в пределе объем пространственного тела: V=т. е. V=*.***Вычисление объемов тел вращения** Пусть пространственное тело получено вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной линиями y=f(x), y=0, x=a, x=b. Тогда площадь S(x) поперечного сечения при фиксированном x – это площадь круга радиуса f(x), поэтому S(x)=π и объем тела вращения равен Аналогично, объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной линиями x=0,y =c ,y =d, вычисляется по формуле

**Вычисление площадей поверхностей тел вращения** Пусть функция y=f(x) и ее производная f′(x) непрерывны на отрезке [a;b]. Можно показать, что площадь поверхности, образованной вращением линии y=f (x) a≤x≤ b,вокруг оси Ox, равна

Аналогично, если функция x=x(y) и ее производная x’(y) непрерывны на отрезке [c;d], то площадь поверхности, образованной вращением линии x=x(y), c≤ y≤d , вокруг оси Oy, равна .

**32. Приближенное вычисление определенного интеграла.**

**Формула прямоугольников** :Для вычисления интеграла I= разбивают отрезок [a;b] точками =b на n равных отрезков длины h = и заменяют площадь криволинейной трапеции на каждом частичном отрезке на площадь прямоугольника высоты =f( где – середина отрезка [;], тогда I=;**Формула трапеций**  
Формула трапеций получается при замене на каждом частичном отрезке [;], − площади криволинейной трапеции площадью обычной трапеции. Обозначим h =; ; +ih,1 ≤i ≤ n; = f(Тогда I=

Формула Симпсона получается при замене на каждом частичном отрезке графика функции f(x) параболой. При этом отрезок [a;b] разбивают на четное число 2n частичных отрезков и на каждой паре частичных отрезков заменяют график функции параболой, построенной по трем точкам, отвечающим концам отрезков. Обозначим h =;=a ; ,1≤i≤2n; =f( Тогда I=

**33. Интегралы по фигуре, их свойства, геометрический и физический смысл.**

**Опр. 1.** Множество точек называется связным, если любые две его точки можно соединить линией, все точки которой принадлежат данному множеству.

**Опр. 2.** Под геометрической фигурой Φ будем понимать одно из следующих связных (включая границу) множеств: (А) отрезок [a;b] на числовой прямой;   
(Б) область D на плоскости (плоская область);   
(В) пространственная область Ω, ограниченная замкнутой поверхностью, – тело в пространстве;   
(Г) линия L на плоскости или в пространстве; (Д) поверхность σ в пространстве.   
Опр. 3. Диаметром d(Φ) фигуры Φ называется максимальное расстояние между двумя точками этой фигуры. Будем рассматривать фигуры конечного диаметра, т. е. ограниченные фигуры. Опр. 4. Под мерой μ(Φ) геометрической фигуры будем понимать:   
(А) длину отрезка [a;b];  
(Б) площадь плоской области D;   
(В) объем тела Ω;   
(Г) длину линии L;   
(Д) площадь поверхности σ.   
Интеграл по фигуре (ИФ) является обобщением понятия определенного интеграла на случай различных геометрических фигур. Пусть во всех точках множества Φ определена и непрерывна функция f (M), M∈ Φ Разобьем фигуру Φ на n частичных (элементарных) фигур , ,1 ≤i≤n с мерами ; Δ обозначим через d() диаметр фигуры ; на каждой элементарной фигуре выберем произвольную точку ∈ и вычислим значение функции в этой точке: f(). Составим сумму S=   
Эта сумма называется n-ой интегральной суммой для функции f(M) по фигуре Φ. Обозначим через =max d( ) диаметр разбиения – наибольший из диаметров элементарных фигур, составляющих разбиение.   
Опр. 5. Интегралом от функции f(M) по фигуре Φ называется предел интегральной суммы при измельчении разбиения, т. е. при диаметре разбиения, стремящемся к нулю: 0μ = при условии, что этот предел существует, конечен и не зависит ни от способа разбиения фигуры Φ на элементарные фигуры, ни от выбора точек на элементарных фигурах. Опр. 6. Функция f(M) называется интегрируемой по фигуре Φ с мерой μ, если существует интеграл от функции f(M) по фигуре Φ. Т 1. Если фигура Φ связная, ограниченная и содержит граничные точки, а функция f(M) непрерывна на множестве Φ, то эта функция интегрируема на Φ.  
**Названия и обозначения интегралов по фигуре:**(А) Если Φ = [ a;b ] ⊂R, то ИФ – это определенный интеграл по отрезку [a;b]:   
(Б) Если Φ = D⊂ (плоская область), то ИФ называется двойным интегралом по области D и обозначается   
(B)Если Φ = Ω ⊂ (тело в пространстве), то ИФ называется тройным интегралом по пространственной области Ω и обозначается   
 Интегралы (Б) и (В) называются кратными интегралами. (Г) Если Φ = D⊂ или Φ = L ⊂ то ИФ называется криволинейным интегралом 1-го рода, или криволинейным интегралом по длине дуги и обозначается в случае кривой на плоскости или в случае кривой в пространстве.   
(Д) Если Φ – поверхность σ в пространстве, то ИФ называется поверхностным интегралом 1-го рода, или поверхностным интегралом по площади поверхности и обозначается.  
 Свойства ИФ 1. ИФ от единицы равен мере фигуры: μ(Ф)  
2. Линейность

3. Аддитивность: если фигуру Φ можно разбить на две фигуры Φ1 и Φ2 так, что их общая часть имеет меру0:Φ = ,μ ( ∩ = 0, то ИФ по Φ можно представить в виде суммы ИФ по и ИФ по : ( )=   
4. Если f(M)≥0 при всех M ∈Φ, то ≥ 0

5. Монотонность: если f(M)≥g(M) при всех M ∈Φ, то   
6.   
7. Оценка ИФ: если =min f(M); =maxf(M); – наименьшее и наибольшее значения функции f(M) на фигуре Φ, т. е. ≤f(M) ≤ при всех M ∈Φ, то μ Φ ≤ ≤ μ(Φ)   
8. (Теорема о среднем). Если функция f(М) непрерывна на фигуре Φ, то существует такая точка ∈Φ, что =   
**Геометрический смысл ИФ** Во-первых, как указано в свойстве 1, ИФ от единицы равен мере фигуры: =.Это означает следующее.   
(А) Определенный интеграл от единицы равен длине отрезка интегрирования: =  
(Б) Двойной интеграл от единицы равен площади области интегрирования:   
(В) Тройной интеграл от единицы выражает объем тела интегрирования: ∫∫∫dxdydz=VΩ   
(Г) Криволинейный интеграл 1-го рода от единицы выражает длину кривой интегрирования: ∫dl= l   
(Д) Поверхностный интеграл 1-го рода от единицы выражает площадь поверхности интегрирования: ∫∫dS =Sσ   
Укажем теперь геометрический смысл ИФ от неотрицательной функции для случаев двойного интеграла и криволинейного интеграла 1-го рода в случае кривой на плоскости.   
(Б) Пусть f(x;y)≥0 при всех M(x;y) ∈D. Назовем криволинейным цилиндром тело, ограниченное сверху поверхностью z = f(x;y), снизу областью D, лежащей в плоскости Oxy, а по бокам – цилиндрической поверхностью, направляющей которой служит граница области D, а образующие параллельны оси Oz.   
Тогда двойной интеграл от функции f (x ;y) по области D выражает объем криволинейного цилиндра: Vкр.цил = ∫∫ f(x; y)dxdy.   
(Г) Пусть L – кривая, лежащая в плоскости Oxy, и f(x;y)≥0 при всех M(x;y)∈L. Рассмотрим цилиндрическую поверхность, направляющей которой служит линия L, а образующие параллельны оси Oz . Тогда криволинейный интеграл 1-го рода от функции f(x;y) по линии L выражает площадь той части этой цилиндрической поверхности, которая ограничена снизу линией L, а сверху поверхностью z=f(x;y): Sцил.пов= ∫ f(x;y)dl   
Физический смысл ИФ Пусть неотрицательная функция γ(M) выражает плотность фигуры Φ в точке M. Тогда ИФ от плотности γ(M) равен массе фигуры: Это означает следующее.   
(А) Масса стержня равна определенному интегралу от линейной плотности стержня:   
(Б) Масса плоской пластинки равна двойному интегралу от плотности пластинки: (x;y) dxdy.  
(В) Масса пространственного тела равна тройному интегралу от плотности этого тела: =  
(Г) Масса кривой равна криволинейному интегралу 1-го рода от плотности этой кривой: (x;y;z)dl   
(Д) Масса поверхности равна поверхностному интегралу 1-го рода от плотности, заданной в каждой точке этой поверхности: (x;y;z)dS .

**34. Вычисление, геометрические и физические приложения двойного интеграла.** Вычисление двойного интеграла сводится к последовательному вычислению двух определенных интегралов. Опр. 1. Область D называется правильной в направлении оси Оу, если она ограничена снизу и сверху двумя непрерывными кривыми y = (x) и y = (x), а с боков – вертикальными прямыми x=a и x =b , причем (x)≤ при всех x∈[a;b]. При этом линия y= (x) называется линией входа, а y = (x) – линией выхода, поскольку каждая прямая x = const, x∈ (a ; b) параллельная оси Оу, пересекает границу области D не более двух раз, «входя» в область через линию y=(x) и «выходя» через y= (x). В этом случае область может быть задана следующим образом: D={(x,y):(x) ≤y ≤ ≤x ≤b} **;**Опр. 2. Область : D={(x,y):(y) ≤x ≤ ≤y ≤d} называется правильной в направлении оси Оx ; линия x =(y) называется линией входа, а x= (y) – линией выхода. В этом случае каждая прямая y = const, y∈( c ;d ) параллельная оси Оx, пересекает границу области D не более двух раз, «входя» в область через линию x =(y) и «выходя» через x= (y).Если область D не является правильной ни в направлении оси Оy, ни в направлении оси Оx, ее разбивают на несколько областей. Пусть на области D определена некоторая функция f (x;y) ≥0. Тогда, в соответствии с геометрическим смыслом, двойной интеграл от функции f(x; y) по области D выражает объем криволинейного цилиндра: V кр.цил= ;С другой стороны, этот объем можно найти по формуле Vкр.цил= где S(x) -площадь сечения криволинейного цилиндра плоскостью x = const, перпендикулярной оси Оx. В сечении получим криволинейную трапецию ABCE, ограниченную снизу отрезком AB, по бокам – прямыми, параллельными Oz, сверху – графиком функции z=f(x;y) при фиксированном x; ее площадь равна S(x)= . Поэтому V кр.цил= Формулу называют формулой сведения двойного интеграла к повторному; правую часть (3) называют повторным интегралом с внешним интегрированием по переменной x и внутренним – по y. Сначала вычисляется внутренний интеграл как обычный определенный по переменной у, при этом переменная х считается постоянной, а затем – внешний по переменной х. Если область D задается формулой (2), т. е. является правильной в направлении оси Оx и проектируется на отрезок [c;d] оси Оy , то виде В повторном интеграле (3) или (4) внешние пределы всегда постоянны, а внутренние, как правило, зависят о той переменной, по которой берется внешний интеграл.

**35. Вычисление, геометрические и физические приложения криволинейного интеграла 1-го рода.**

Вычисление КРИ-1 осуществляется путем сведения к определенному интегралу. Для этого выражают дифференциал длины дуги dl и все координаты x, y, z через одну переменную, учитывая, что точка (x;y;z) лежит на кривой L. 1. Пусть L – линия в пространстве, заданная параметрически уравнениями , ≤t ≤   
Тогда КРИ-1 вычисляется по формуле (1) 2. Если L – линия на плоскости, заданная параметрически: то, получаем   
3.Пусть линия L в плоскости Oxy задается уравнение , ≤ х ≤ . Следует формула . В некоторых случаях удобнее интегрировать по переменной y: если кривая интегрирования L задана уравнением , ≤ х ≤ . .При сведении КРИ-1 к определенному интегралу интегрирование ведется всегда от меньшего значения параметра к большему: ≤ ;≤ ;≤ .

**36. Понятие ряда, общего члена ряда, суммы ряда, остатка ряда. Необходимый признак сходимости ряда. Основные свойства числовых рядов. Опр. 1.** Пусть дана бесконечная последовательность чисел . Выражение вида (1) называется числовым рядом, числа называются членами ряда, а выражение для n u называется общим членом ряда. **Опр. 2**. Сумма первых n членов ряда называется n-й частичной суммой ряда: +…+ **Опр. 3.** Суммой ряда называется предел последовательности частичных сумм S = если он существует и конечен; в этом случае ряд называется сходящимся. Если предел последовательности частичных сумм не существует или равен бесконечности, то ряд называется расходящимся.**Свойства рядов:** 1. Если ряд (1) сходящийся и его сумма равна S: S то ряд тоже сходящийся и его сумма равна +…+ (здесь c – произвольное число). При умножении всех членов сходящегося ряда на одно и то же число с получается сходящийся ряд. При умножении всех членов расходящегося ряда на одно и то же число c ≠ 0 получается расходящийся ряд. 2. Если сложить почленно два сходящихся ряда, то получим сходящийся ряд: если то = ± .  
Если сложить почленно сходящийся и расходящийся ряд, то получим расходящийся ряд. Если сложить два расходящихся ряда, можно получить как сходящийся, так и расходящийся ряд. 3. Если ряд сходится, то сходится и ряд, полученный из данного путем приписывания или отбрасывания любого конечного числа членов. Опр. 4. Ряд (2) называется n-м остатком ряда. Из свойства 3 следует, что ряд и любой его остаток сходятся или расходятся одновременно. Если ряд сходится, то ;   
Если ряд сходится, то =0 Можно показать, что верно и обратное: если =0 то ряд сходится. Т 1(необходимое и достаточное условие сходимости ряда). Ряд сходится, когда предел n-го остатка ряда равен нулю: ⇔ Т 2 (необходимый признак сходимости ряда). Если ряд сходится, то предел общего члена ряда равен нулю: ⇔ Доказательство. Заметим, что +…+. Если ряд сходится, то =S; =S.  
 Учитывая, что получим Следствие (достаточный признак расходимости ряда). Если ≠ 0 то ряд расходится. **Опр. 5.** Ряд называется гармоническим рядом.

**37. Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами. Опр. 1.** Знакоположительным называется ряд, все члены которого (начиная с некоторого номера) неотрицательны. Знакоотрицательным называется ряд, все члены которого (начиная с некоторого номера) неположительны. Знакоотрицательный ряд переходит в знакоположительный путем умножения на −1, что не влияет на сходимость ряда. Т 1 (непредельный признак сравнения). Пусть даны два ряда с неотрицательными членами: причем выполняется условие 0 ≤ ≤ для всех n. Тогда если ряд (ряд с большими членами) сходится, то ряд (ряд с меньшими членами) сходится; если ряд с меньшими членами расходится, то и ряд с большими членами расходится. Т 2 (предельный признак сравнения). Пусть даны два ряда с неотрицательными членами: Тогда если существует конечный, отличный от нуля, предел = A≠ 0≠ ∞ то ряды и ведут себя в смысле сходимости одинаково: либо оба сходятся, либо оба расходятся. Т 3 (признак Даламбера). Пусть дан ряд с неотрицательными членами: и существует предел D=. Тогда если D <1, то ряд сходится; если D >1, то ряд расходится; если D =1, то вопрос о сходимости ряда остается открытым, нужны доп. исследования. Признак Даламбера удобно использовать, если общий член содержит выражения вида n! (факториал) или . Т 4 (интегральный признак Коши). Пусть дан ряд с неотрицательными членами: Если члены ряда могут быть представлены как числовые значения некоторой функции f(n), причем 1) функция f(x) определена и непрерывна при x ≥1; 2) функция f(x) неотрицательна: f (x) ≥0 при x ≥1; 3) функция f(x) невозрастающая при x ≥ 1, то ряд и несобственный интеграл ведут себя в смысле сходимости одинаково: либо оба сходятся, либо оба расходятся. Замечание. Теорема справедлива и в том случае, если условия 1), 2), 3) на функцию f(x) выполняются при x≥a . Тогда сходимость ряда равносильна сходимости несобственного интеграла .

**38. Гармонический ряд. Обобщенный гармонический ряд.** Ряд называется гармоническим рядом.**Опр. 2.** Ряд называется обобщенным гармоническим рядом.Итак, обобщенный гармонический ряд Обобщенный гармонический ряд удобно использовать при исследовании сходимости некоторых числовых рядов с помощью предельного признака сравнения. Для исследования сходимости знакоположительных рядов используем: необходимый признак сходимости (если ≠ 0 то ряд расходится); признак Даламбера (если общий член ряда содержит n! Или ); предельный признак сравнения (если общий член ряда содержит многочлены или корни); - интегральный признак Коши (если функция f(x) непрерывна, неотрицательна, невозрастающая при x ≥a и интеграл . легко вычисляется); непредельный признак сравнения. Вопрос о сходимости знакоотрицательного ряда сводится к исследованию сходимости знакоположительного ряда, который получается путем умножения исходного ряда на −1.

**39. Знакопеременные ряды, понятия абсолютной и условной сходимости. Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Опр. 1.** Числовой ряд, содержащий бесконечное множество положительных и бесконечное множество отрицательных членов, называется знакопеременным. **Опр. 2.** Числовой ряд +, где >0 члены которого попеременно то положительные, то отрицательные, называется знакочередующимся. Т 1 (признак Лейбница). Если модули членов знакочередующегося ряда удовлетворяют условиям: 1) монотонно убывают, т. е. > для всех n; 2)то такой знакочередующийся ряд сходится и его сумма по абсолютной величине не превосходит модуль первого члена ряда: |S| <.Если знакочередующийся ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница, то модуль n-го остатка ряда + не превосходит модуль первого своего члена: . Признак справедлив и в том случае, если условие выполняется для всех n, начиная с некоторого номера N.Т 2 (достаточный признак сходимости знакопеременного ряда). Пусть дан знакопеременный (не обязательно знакочередующийся!) ряд 1. Если ряд состоящий из модулей членов данного знакопеременного ряда, сходится, то сходится и исходный ряд Следствие. Если ряд расходится, то и расходится. Таким образом, возможны следующие три ситуации.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Ряд | Если ряд | А ряд |
| 1)абсолютно сходящимся, | сходиться | <-Сходиться |
| 2)условно сходящимся, | сходиться | Расходиться |
| 3)расходящимся, | Расходится-> | Расходится |

Опр. 3. Знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся, если ряд, составленный из модулей его членов, сходится. Опр. 4. Знакопеременный ряд называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.

**40. Степенные ряды. Область сходимости, радиус сходимости. Теорема Абеля. Опр. 1.** Ряд, члены которого являются функциями от x, называется функциональным: +…+ (1) При каждом фиксированном значении переменной x = получается числовой ряд +…+ **Опр. 2**. Если числовой ряд сходится, то называется точкой сходимости функционального ряда; если числовой ряд расходится, то называется точкой расходимости функционального ряда. **Опр. 3.** Областью сходимости ряда (1) называется множество всех его точек сходимости. В области сходимости функционального ряда его сумма является некоторой функцией от x: S(x)= где+…+ Среди функциональных рядов в математике и ее приложениях особую роль играют степенные ряды, члены которых являются степенными функциями. Опр. 4. Степенным рядом называется ряд, членами которого являются степенные функции, т. е. ряд вида ++0…+ – числа, которые называются коэффициентами степенного ряда, a – некоторое число. Сделав замену x-a=X , всегда можно свести ряд к более простому ++…+ . Если подставить вместо x какое-то число, получим числовой ряд. Если при x= получается сходящийся числовой ряд, то точка называется точкой сходимости ряда; если получается расходящийся числовой ряд, то точка называется точкой расходимости. Область сходимости ряда – это множество всех его точек сходимости. Степенной ряд всегда сходится при x =0. Следовательно, область сходимости степенного ряда всегда содержит по крайней мере одну точку.Т 1 [Абель]. 1) Если степенной ряд сходится при некотором x = ≠0, то он сходится абсолютно при всех значениях x, удовлетворяющих x < . 2) Если степенной ряд расходится при некотором x = , то он расходится при всех значениях x, удовлетворяющих |x|>| . ( Док-во) Так как ряд сходится, то выполняется необходимое условие сходимости =0 поэтому величина ограничена, т. е. существует такое число M > 0, что для всех n выполняется неравенство |≤ M. Рассмотрим любое х такое, что |x| < , тогда =q <1 Следовательно, |=| ≤ M. Таким образом, модуль каждого члена степенного ряда не превосходит соответствующего члена сходящегося ряда геометрической прогрессии. По непредельному признаку сравнения делаем вывод, что наш ряд сходится, т. е. сходится для всех х, для которых x < . 2) Пусть теперь при x = ( ряд расходится). Если допустить, что существует точка такая, что ||>| ( и в ней ряд сходится, то, в силу пункта 1), он сходится и в точке x. Мы пришли к противоречию. Следовательно, при всех х, удовлетворяющих условию |x|>| , ряд расходится.   
Из теоремы Абеля следует, что если ряд сходится не во всех точках, то существует такое число R, R ≥0, что для всех точек x∈(-R ;R) ряд сходится, а при всех x, |x|> R , – расходится. Опр. 5. Число R ≥0 такое, что при всех x∈(-R ;R ) ряд сходится, а при всех x,|x|> R , – расходится, называется радиусом сходимости степенного ряда; интервал (−R ; R) называется интервалом сходимости этого ряда. Радиус сходимости степенного ряда равен половине длины интервала сходимости ряда. Интервал сходимости степенного ряда можно найти, применив признак Даламбера к ряду, составленному из модулей членов данного ряда. Область сходимости можно получить, если еще дополнительно исследовать сходимость двух числовых рядов, которые получаются из ряда при x=R и x =−R .   
Если ряд сходится при всех x∈(-∞; +∞), то радиус сходимости R = ∞.Свойства степенных рядов 1. Сумма S(x) степенного ряда вида является непрерывной функцией в интервале сходимости этого ряда ( -R; R). 2. Если два ряда и сходятся в некотором интервале (-), то их сумма также сходится в этом интервале, причем .  
 3. Степенной ряд S(x)= можно почленно дифференцировать S(x)= и интегрировать внутри его интервала сходимости; полученные ряды имеют тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.**Равномерно сходящиеся функциональные ряды**: Рассмотрим функциональный ряд .**Опр. 6** Функциональный ряд на промежутке X сходится равномерно к функции S(x), если max|(x)-S(x)| → 0 при n → ∞, где (x) – n-я частичная сумма ряда. **Т 2 [Вейерштрасс**] (достаточный признак равномерной сходимости ряда). Если члены функционального ряда на промежутке X ограничены по абсолютной величине членами некоторого сходящегося числового ряда, т. е. (x)| ≤ для всех n, для всех x∈X ; – сходящийся, то функциональный ряд сходится равномерно на промежутке X. **Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов** 1. Если члены равномерно сходящегося ряда непрерывны на некотором промежутке, то его сумма также непрерывна на этом промежутке. В равномерно сходящемся ряде возможен почленный переход к пределу: если ряд S(x)= сходится равномерно, то 2. Ряд, сходящийся равномерно, можно почленно интегрировать (внутри его области сходимости): **.**3. Если члены сходящегося функционального ряда имеют непрерывные производные, то такой ряд можно почленно дифференцировать: S’(x) = при условии, что ряд, составленный из производных, сходится равномерно.

**41. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Маклорена.** Ряды Тейлора и Маклорена представляют собой примеры степенных рядов и используются в приближенных вычислениях. Опр. 1. Пусть функция f(x) имеет в окрестности точки 0 x производные любого порядка. Ряд + называетсярядом Тейлора функции f(x) в точке .

Т 1. Если существует число M > 0, такое, что для всех x ∈(;-R; ) ;|f(x)|< M ; | при всех n, то для любого x из этого интервала ряд Тейлора функции f(x) сходится к значению функции f(x). Т 2 (о единственности разложения функции в ряд Тейлора). Если степенной ряд по степеням x− сходится к функции f(x) в окрестности точки , то он является рядом Тейлора функции f(x) в этой точке. Опр. 2. Ряд Тейлора при = 0 называется рядом Маклорена: + **Разложение некоторых элементарных функций в ряд Маклорена**:1. Найдем разложение в ряд Маклорена функции f(x)=; 1) Найдем производные: f’(x)=; f’’(x)=; (x)= ;2) Найдем значения функции и ее производных при x = 0 : f(0)=1;f’(0)=; f’’(0)=; (x)=1;3) Запишем ряд Маклорена: 4) В силу теоремы, поскольку для любого фиксированного сколь угодно большого R > 0 справедливо неравенство |< для всех x∈(-R;R), то полученный ряд сходится к при любом действительном x. 2. Разложим в ряд Маклорена функцию f(x)= sinx . 1) Находя производные f’(x)=cos(x) ; f’’(x)= -sin(x) ; f’’’(x)= -cos(x); =sin(x) ; 2) Значения функции и ее производных при x = 0 равны f (0)=sin0=0; f ′(0)=cos0=1; f ′′(0)=-sin0=0; f ′′′(0)=-cos0 =-1; =sin(0)=0; 3) Составим ряд Маклорена: sinx=0 =4) Так как | ≤1 при всех n и x, то ряд сходится к sin x при любом действительном x. 3. Разложение для f(x)=cosx получим, продифференцировав почленно найденный ряд Маклорена для sin x. В силу свойств степенных рядов, (sinx)’=()’, поэтому cosx=1-- причем этот ряд имеет тот же радиус сходимости, что и исходный. Следовательно, полученный ряд сходится к cos x при всех x, −∞ <x< +∞ . 4. Рассмотрев сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с = 1,q=x , получим 1+ x+ = . Исследуя сходимость этого ряда, можно показать, что его область сходимости ( 1;1). 5. Еще одно разложение получим с помощью подстановки: 1-x+(- =1- x+ при x∈ −( 1;1). 6. Разложение для f (x)=ln(1+x) получим, проинтегрировав почленно найденный в предыдущем пункте ряд. Поскольку f′(x) =,то ln(1+x)= ln(1+x)=(t-=x-+… при -1<x<1. Разложение имеет место при x∈ (-1;1].7. Получим разложение в ряд Маклорена для функции f(x)=arctg , проинтегрировав ряд для функции f’(x) = .Используя равенство и заменяя x на , получим откуда arctg= (t-= x-+… Разложение справедливо при −1 ≤ x≤1 . Функция arctgx определена при всех действительных x, однако указанное разложение в ряд имеет место только при |x| ≤1, так как при |x|>1 данный ряд расходится. **Таблица разложений в ряд Маклорена некоторых элементарных функций** при x∈ ( −∞; + ∞) (т. е. ряд сходится к значению функции при всех x); sinx=при x∈ ( −∞; + ∞); поэтому cosx=1-- при x∈ ( −∞; + ∞); ln(1+x)=(t-=x-+… при x∈ −( 1;1 ;] +…при x при x∈ −( 1;1).   
Методы разложения функций в ряд Тейлора 1. По определению.  
2. Использование формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. 3. Дифференцирование и интегрирование известных разложений. 4. Метод подстановки5. Почленное сложение, вычитание, умножение всех членов ряда на одну и ту же величину.

**42. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях.** Приближенное вычисление значений функций и интегралов основано на разложении функций и интегралов в ряд Тейлора и вычислении суммы ряда с заданной точностью. Для вычисления суммы ряда S с заданной точностью ε используют равенство S=+ и в качестве значения S принимают значение n-й частичной суммы , такое, что остаток ряда nr по абсолютной величине не превосходит ε : |< ε При оценке остатка ряда используют следующие методы. 1) (самый точный) Т 1. Пусть функция f(x) имеет в окрестности точки производные любого порядка. Тогда остаточный член ряда Тейлора удовлетворяет соотношению (x)= где точка c лежит между x и . Эта формула называется представлением остаточного члена формулы Тейлора в форме Лагранжа. 2) (самый простой) В случае знакочередующегося ряда, удовлетворяющего условиям признака Лейбница, остаток ряда по абсолютной величине не превосходит модуль первого своего члена: | 3) Иногда удается остаток ряда оценить с помощью бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

**43. Ряды Фурье. Достаточное условие сходимости ряда Фурье (теорема Дирихле). Ряды Фурье для четных и нечетных функций. Опр. 2.** Рядом Фурье для функции f(x) с периодом T=2l называется ряд f(x)~где Ряд Фурье можно записать для любой функции f (x), если она интегрируема на [-l ;l].Т 1 [Дирихле] (достаточное условие сходимости ряда Фурье). Пусть функция f(x) имеет период T= 2l и удовлетворяет условиям: 1) кусочно-непрерывна на [-l ;l ], т. е. непрерывна на этом отрезке или имеет на нем конечное число точек разрыва 1-го рода;2)кусочно-монотонна на [-l;l], т. е. монотонна на этом отрезке или отрезок можно разбить на конечное число интервалов, на которых она монотонна. Тогда соответствующий функции f(x) ряд Фурье сходится на этом отрезке и его сумма S(x) равна: 1) S()= f(), если в точке x= функция f(x) непрерывна; 2) S()= – x=точка разрыва функции f (x); 3) S(l)= .**Разложение в ряд Фурье четных и нечетных периодических функций**

|  |  |
| --- | --- |
| Функция f(x) называется четной, если ее область определения симметрична относительно 0 и f (-x)= f(x) для всех x из области определения функции. | Функция f(x) называется нечетной, если ее область определения симметрична относительно 0 и f(-x)= -f(x) для всех x из области определения функции. |
| График четной функции симметричен относительно Oy | График нечетной функции симметричен относительно начала координат. |
| Интеграл по симметричному относительно 0 промежутку: | |
|  |  |

Утв. 1. Если f(x) – четная, периодическая с периодом T=2l функция, то ее ряд Фурье содержит только косинусы и имеет вид f(x)~, где Утв. 2. Если f(x) – нечетная, периодическая с периодом T = 2l функция, то она разлагается в ряд по синусам: f(x)~где

**44. Комплексная форма ряда Фурье.** Ряды Фурье часто применяются в комплексной форме записи. Чтобы получить комплексную форму записи ряда Фурье, подставим в тригонометрический ряд Фурье f(x)~ формулы Эйлера: cos(x)= ; sin(x)=(, т. е. ). Тогда ряд Фурье преобразуется следующим образом: f(x)~ =, Обозначим Можно показать, что при всех n =0; ±1; ± 2; 1;.... Таким образом, комплексная форма записи ряда Фурье: f(x)~ где .

**45. Обобщенные ряды Фурье по ортогональным системам функций. Опр. 1.** Система функций , называется ортогональной на отрезке [a;b], если интеграл по отрезку [a; b] от произведения любых двух различных функций этой системы равен 0: при n≠m . Основными примерами ортогональных систем функций являются тригонометрические системы вида **.**Примером ортогональной нетригонометрической системы является система многочленов Лежандра:Выпишем несколько первых членов этой системы: Можно показать, что система многочленов Лежандра ортогональна на [−1;1] . **Опр. 2.** Обобщенным рядом Фурье функции f(x) по ортогональной на отрезке [a;b] системе функций , называется ряд вида f(x)~ в котором коэффициенты вычисляются по формулам. Утв. 1. Среди всех обобщенных многочленов

наименьшее среднее квадратичное уклонение от функции f (x) на отрезке [a;b] имеет тот многочлен, коэффициенты которого есть коэффициенты обобщенного ряда Фурье, т. е. находятся по формуле.

**46. Понятия дифференциального уравнения, его общего и частного решений. Задача Коши. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши. Опр. 1.** Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, связывающее независимую переменную/ые, искомую функцию и производные этой ф-ции. Порядком ДУ называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение. **Опр. 2.** Уравнение вида F( x; y; y’;...; )= 0, т. е. ДУ, в котором искомая ф-ция y зависит от одной переменной x, называется обыкновенным дифференциальным уравнением. ДУ, в котором искомая функция зависит от нескольких переменных, называется дифференциальным уравнением с частными производными**. Опр. 3.** Обыкновенное ДУ называется разрешенным относительно старшей производной, если оно записано в виде = f( x; y; y’;...; ). **Опр. 4.** Решением ДУ называется ф-ция, которая при подстановке в уравнение обращает его в верное тождество. **Опр. 5.** Процесс нахождения решения ДУ называется интегрированием ДУ. График решения ДУ называется интегральной кривой этого уравнения.**Опр. 6**. Задачей Коши для ДУ n-го порядка называется задача нахождения такого решения ДУ , которое удовлетворяет условиям;Эти условия называются начальными условиями, или условиями Коши для ДУ.   
Рассмотрим задачу Коши для ДУ 1-го порядка:   
Т 1 (существования и единственности решения задачи Коши для ДУ 1-го порядка). Если функция f(x;y) и ее частная производная (x;y) непрерывны в некоторой области D, содержащей точку (; ), то существует единственное решение уравнения y′=f(x;y), удовлетворяющее начальному условию y()= Геометрически это означает, что при выполнении условий теоремы Коши в точке (; )∈D через эту точку проходит ровно одна интегральная кривая данного ДУ. Рассмотрим задачу Коши для ДУ 2-го порядка: Т 2 (существования и единственности решения задачи Коши для ДУ 2-го порядка). Если ф-ция f(x;y;y’) и ее частные производные (x;y;y’) и (x;y;y’) непрерывны в некоторой области D, содержащей точку (; ;),то существует единственное решение уравнения y’’=f(x;y;y’), удовлетворяющее начальным условиям y(. **Опр. 7.** Общим решением ДУ n-го порядка называется функция y= ϕ(x; , которая зависит от n произвольных постоянных и удовлетворяет условиям: 1) является решением ДУ при любых конкретных значениях произвольных постоянных 2) каковы бы ни были начальные условия, существуют такие значения произвольных постоянных , что функция y= ϕ(x; , является решением ДУ и удовлетворяет начальным условиям. **Опр. 8.** Частным решением ДУ n-го порядка называется функция y= ϕ(x; , которая получается из общего решения при конкретных значениях произвольных постоянных. Опр. 9. Если общее решение ДУ найдено в неявном виде, т. е. задается уравнением Ф(x;y; )=0, то говорят, что найден общий интеграл ДУ; уравнение Ф(x; =0, называется в этом случае частным интегралом. С геометрической точки зрения общее решение ДУ – это семейство интегральных кривых на плоскости, а частное решение – одна конкретная кривая этого семейства. Если в точке ( ) нарушено хотя бы одно из условий теоремы Коши, то эта точка называется особой точкой соответствующего ДУ. Через эту точку может проходить более одной интегральной кривой или не проходить ни одна интегральная кривая. Если нарушение условий теоремы Коши происходит вдоль некоторой линии и эта линия является интегральной кривой данного ДУ, то такую интегральную кривую называют особой, а соответствующее ей решение – особым решением ДУ.

**47. Основные типы дифференциальных уравнений первого порядка и методы их решения.**У 1-го порядка в общем случае имеет вид F(x;y;y’)=0. Если в ДУ 1-го порядка можно выразить y′, то оно записывается в виде ДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной: y‘= f(x;y). Иногда ДУ 1-го порядка записывают в дифференциальной форме: P(x;y)dx+Q(x;y)dy=0.Переменные x и y в нем равноправны, т. е. любую из них можно рассматривать как функцию другой. Простейшим ДУ 1-го порядка является уравнение вида y′ = f(x), которое решается интегрированием: y = **. ДУ с разделяющимися переменными**:ДУ 1-го порядка, разрешенное относительно производной, называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными (ДУ с РП), если оно может быть записано в виде y’= , т. е. если его правая часть может быть представлена в виде произведения двух функций: одной, зависящей только от x, и второй, зависящей только от y. Метод решения ДУ заключается в том, чтобы разделить переменные, а затем проинтегрировать: ;  
∫∫.При делении на ) мы считаем, что ) ≠0. Чтобы не потерять особые решения ДУ, необходимо: 1) решить уравнение ) =0; 2) проверить, являются ли его решения решениями ДУ; 3) проверить, могут ли эти решения быть получены из общего решения при некотором значении C, включая C = ∞. Если нет, то это особые решения. ДУ, записанное в дифференциальной форме, является ДУ с РП, если его можно представить в виде ).Для того чтобы разделить переменные, нужно разделить это уравнение на . При этом среди решений уравнения могут быть особые решения. **Однородные ДУ 1-го порядка Опр. 2.** Однородным ДУ 1-го порядка называется ДУ, которое может быть записано в виде y′= f ( x; y), где f (tx;ty) = f(x;y). **Опр. 3**. Функция f(x;y) называется однородной функцией n-го порядка, если при умножении каждого ее аргумента на произвольный множитель t вся функция умножается на t^n , т. е. f (tx;ty) = t’’f( x; y ). **Утв. 1.** Любое однородное ДУ 1-го порядка может быть представлено в виде. y’= ϕ( Док-во. Пусть y f x y ′ = f ( x; y ) – однородное ДУ 1-го порядка, т. е. f (tx;ty) = f ( x; y ). Полагая t = получим f ( x; y )=f(= ϕ( т. е. правая часть ДУ может быть представлена как функция одного аргумента . Метод решения однородного ДУ 1-го порядка – замена u= или, что то же самое, y = ux. Такая подстановка всегда позволяет свести однородное ДУ 1- го порядка к ДУ с РП относительно новой неизвестной функции u. Действительно, если y=ux , то y’=u’x+u. Подставляя эти соотношения в, получим u’x+u **=**ϕ( u’x=ϕ(u)-u;; **Линейные ДУ 1-го** порядка Опр. 4. Линейным ДУ 1-го порядка называется ДУ, которое может быть записано в виде y’=p(x)y+q(x), т. е. является линейным относительно неизвестной функции y и ее производной y′. Метод решения линейного ДУ 1-го порядка, предложенный И. Бернулли, – подстановка y=uv , т. е. решение ищется в виде произведения двух функций. Подставляя y=uv и y’=u’v+uv’ в ДУ, получим u’v+uv’=p(x)uv+q(x); u’v+u(v’-p(x)v)=q(x);. Поскольку вместо одной неизвестной функции y мы ввели две неизвестные функции u и v, то одну из них можно выбрать так, чтобы получить более простое уравнение для определения второй функции. Поэтому выбираем функцию v так, чтобы множитель при u был равен 0, а затем находим функцию u из полученного уравнения, т.е. решаем систему . **Уравнение Бернулли** Опр. 5. Уравнением Бернулли называется ДУ, которое может быть записано в виде y’=p(x)y+ q(x) , где α – некоторое число. (Здесь считается, что α ≠0, α ≠ 1, поскольку при α = 0 получается линейное ДУ, а при α =1 – ДУ с РП.) Это ДУ названо в честь Я. Бернулли, опубликовавшего это уравнение в 1695 г. Метод решения – подстановка y =uv , так же, как и для линейного ДУ 1-го порядка.

**48. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.** ДУ 2-го порядка в общем случае имеет вид F (x;y;y’;y’’ ) =0. Иногда решение ДУ 2-го порядка с помощью подходящей подстановки может быть сведено к решению ДУ 1-го порядка. В этом случае говорят, что ДУ 1-го порядка допускает понижение порядка. Рассмотрим два типа уравнений, допускающих понижение порядка. Если ДУ 2-го порядка имеет вид F (x;y’;y’’ )=0, т. е. не содержит явно искомую функцию y, то оно допускает понижение порядка введением новой функции z(x) = y′. Тогда y’’=(y’)’=z’ и уравнение приводится к ДУ 1-го порядка F ( x;z ;z’ )= 0 относительно новой неизвестной функции z = z(x). Если ДУ 2-го порядка имеет вид F (y ;y’ ;y’’ )= 0, т. е. не содержит явно независимую переменную x, то оно допускает понижение порядка подстановкой вместо y′ новой неизвестной функции, зависящей от переменной y: y’= p(y). Тогда по правилу дифференцирования сложной функции получаем: y’’= т. е. исходное уравнение приводится к ДУ 1-го порядка F(y;p; =0 относительно новой неизвестной функции p = p(y)

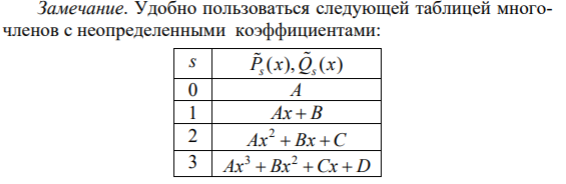
**49. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) n-го порядка, теорема о структуре общего решения.**Опр. 1. **Линейным неоднородным дифференциальным уравнением** (ЛНДУ) n-го порядка называется ДУ вида += f(x) (1)где f (x) ≠0. Здесь функции , − называются коэффициентами ЛНДУ, а f(x) – его свободным членом. **Опр. 2.** Линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) n-го порядка называется ДУ вида += 0 (2) т. е. линейное дифференциальное уравнение, в котором свободный член f (x)=0. Уравнение – это ЛОДУ, соответствующее ЛНДУ, поскольку одним из этапов решения ЛНДУ является нахождение общего решения ЛОДУ. Т 1 **(существования и единственности решения задачи Коши для ЛНДУ n-го порядка).** Если коэффициенты , − и свободный член f(x) ЛНДУ (1) непрерывны в окрестности точки , то при любых значениях − существует единственное решение ЛНДУ, удовлетворяющее начальным условиям y( .**Утв. 1**. Если функции y = и y = являются частными решениями ЛОДУ, то их линейная комбинация y=+, где – произвольные постоянные, также является решением ЛОДУ. Рассмотрим для простоты случай ЛОДУ 2-го порядка y’’+ .Если функции y = (x) и y =(x) являются частными решениями ЛОДУ, то справедливы равенства ’’(x)+;’’(x)+. Подставляя y=+,y’=+,y’’=+, в левую часть ЛОДУ, а затем раскрывая скобки и группируя слагаемые с C1 и слагаемые с C2 , с учетом получим:y’’(x)++’’+++ а значит, ф-ция удовлетворяет ЛОДУ . Для дальнейшего нам понадобятся понятия линейной зависимости и линейной независимости системы функций на некотором промежутке, такие Опр. 3. Функции называются линейно зависимыми на ( a;b), если существуют такие числа , не все равные нулю, что равенство выполняется при всех x∈(a;b). Если же это равенство верно только при , то функции , называются линейно независимыми на (a;b). Утв. 2. Две функции и линейно зависимы на (a;b) тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т. е. ≡ const при всех x∈(a;b).Опр. 4. Определителем Вронского (вронскианом) функций называется  
**Утв. 3.** Если функции являются частными решениями некоторого ЛОДУ с непрерывными коэффициентами, то они линейно независимы на (a;b) тогда и только тогда, когда вронскиан этих функций отличен от 0 на этом интервале, т. е. W(x) ≠0 при всех x∈(a;b). Замечание 1. При этом для определителя Вронского W(x), построенного для частных решений некоторого ЛОДУ с непрерывными на (a;b) коэффициентами, имеет место следующее свойство. Утв. 4. Если вронскиан частных решений некоторого ЛОДУ с непрерывными на (a;b) коэффициентами W () ≠0 при некотором ∈(a;b), то W(x) ≠0 при всех x∈(a;b). **Утв. 5.** Если– дифференцируемые на (a;b) функции и их вронскиан W () ≠0 при некотором ∈(a;b), то эти функции линейно независимы на (a;b).Опр. 5. Фундаментальной системой решений ЛОДУ n-го порядка называется совокупность n линейно независимых частных решений этого уравнения. Любое решение ЛОДУ может быть представлено в виде линейной комбинации функций, составляющих фундаментальную систему решений этого уравнения. Число функций в фундаментальной системе решений ЛОДУ совпадает с порядком этого уравнения. Т 2 (о структуре общего решения ЛОДУ n-го порядка). Общее решение ЛОДУ (2) n-го порядка с непрерывными коэффициентами имеет вид = + где – произвольные постоянные, ,– линейно независимые частные решения этого ДУ (т. е. частные решения, образующие фундаментальную систему решений).

**50. Интегрирование ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.** Рассмотрим ЛОДУ 2-го порядка y’’+py’+qy = 0, где p,q – действительные числа. Общее решение ЛОДУ 2-го порядка имеет вид +, т. е. необходимо найти два линейно независимых частных решения , ЛОДУ. Л. Эйлер предложил искать частные решения в виде , y = где λ – число. Чтобы определить, при каком значении λ эта функция будет решением ЛОДУ, подставим функцию в уравнение. Так как y’ = λ, y’’ = то получим - характеристическое уравнение ЛОДУ. Функция y = является решением ЛОДУ, когда λ – корень уравнения. При решении характеристического уравнения возможны три случая в зависимости от знака его дискриминанта: D>0, D=0,D < 0. 1. Случай D > 0.Тогда характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня: ≠ . Тогда функции = = являются частными решениями ЛОДУ. Они линейно независимы:   
W(x)=|=|-. Следовательно, общее решение ЛОДУ 2-го порядка в этом случае имеет вид

.2. Случай D = 0. Тогда характеристическое уравнение имеет два совпадающих действительных корня: = = − Тогда = является частным решениями ЛОДУ . Функция = – тоже решение ЛОДУ. Подставляя производные = ; = в уравнение и группируя слагаемые с и слагаемые с имеем Здесь первая скобка равна 0, так как λ1 – корень характеристического уравнения, а вторая – поскольку этот корень равен = − 2 Случай D < 0. Тогда характеристическое уравнение имеет 2 комплексных корня, они являются комплексносопряженными, т. е. = α ± βi (здесь α и β – действительные числа, β > 0; i – мнимая единица: = −1). В этом случае частными решениями ЛОДУ (6) являются функции = и . Используя формулу Эйлера cos ϕ+ isinϕ , получим   
Из утверждения 1 следует, что функции также являются частными решениями ЛОДУ (6). Можно показать, что они линейно независимы, а значит образуют фундаментальную систему решений ЛОДУ (6). Поэтому общее решение ЛОДУ (6) в рассматриваемом случае можно записать в виде .

**51. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ), теорема о структуре общего решения. Метод вариации произвольных постоянных.**Рассмотрим ЛНДУ n-го порядка с непрерывными коэффициентами и непрерывной правой частью (свободным членом) += f(x) (1) При решении этого уравнения рассматривают соответствующее ему ЛОДУ += 0 т. е. ЛОДУ с такой же левой частью, что и ЛНДУ. Т 1 (о структуре общего решения ЛНДУ). Общее решение ЛНДУ с непрерывными коэффициентами равно сумме частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего ему ЛОДУ: При нахождении частных решений ЛНДУ может быть полезна следующая теорема. Т 2 (о наложении решений ЛНДУ). Если 1 y =(x) – частное решение ЛНДУ с правой частью (х) : y’’+p(x)y’+q(x)u=(х); функция y =(x) – частное решение ЛНДУ с правой частью (х) : y’’+p(x)y’+q(x)y=(х), то функция y= (x)+(x) является частным решением ЛНДУ с правой частью (х)+(х) : y’’+p(x)y’+q(x)y=+(х) **.Метод вариации произвольных постоянных** Этот метод был предложен Лагранжем и позволяет решать ЛНДУ при условии, что известно общее решение соответствующего ЛОДУ. Рассмотрим метод вариации произвольных постоянных на примере ЛНДУ 2-го порядка y’’+p(x)y’+q(x)y = f(x). Пусть известно общее решение соответствующего ЛОДУ y’’+p(x)y’+q(x)y= 0. Оно имеет вид . где y = и y = – частные решения ЛОДУ, образующие фундаментальную систему решений этого уравнения. По теореме о структуре общего решения ЛНДУ, , т. е. для нахождения общего решения уравнения нужно еще найти какое-нибудь его частное решение. **Метод вариации произвольных постоянных** состоит в том, чтобы искать частное решение ЛНДУ в виде , (5) где – некоторые вспомогательные функции, которые необходимо найти. Чтобы определить функции , подставим в уравнение, для чего найдем +Поскольку вместо одной неизвестной функции мы ввели две неизвестные функции, то потребуем, чтобы эти функции удовлетворяли дополнительному условию =0 Тогда +. Подставляя , в уравнение (3) и вынося функции за скобки, получаем + =  
Здесь выражения в скобках при равны 0, так как функции y = (x) и y = (x) являются решениями ЛОДУ (4), т. е. удовлетворяют этому уравнению. Следовательно, функция (5) является частным решением уравнения (3) тогда и только тогда, когда функции удовлетворяют системе (6) Имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными . Ее определитель W(x)=| ≠0 так как это определитель Вронского для фундаментальной системы решений ЛОДУ. Поэтому система имеет единственное решение. Определяя из системы . и интегрируя, подставляем функции=∫ = ∫ в (5) и получаем частное решение ЛНДУ.

**52. Метод неопределенных коэффициентов для решения ЛНДУ с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.**Для ЛНДУ с постоянными коэффициентами и специальной правой частью существует более простой метод нахождения , который не требует интегрирования, – метод неопределенных коэффициентов.Суть метода неопределенных коэффициентов в том, что по виду специальной правой части записывают ожидаемую форму частного решения ч. н. y с неопределенными коэффициентами, а затем находят значения коэффициентов, подставляя в ЛНДУ**.** Частное решение ЛНДУ со специальной правой частью (2) ищут в виде,где r – кратность числа α + βi как корня характеристического уравнения данного ЛНДУ (т. е. сколько корней характеристического уравнения равны числу α + βi; будем называть число α + βi контрольной постоянной); – многочлены степени s с неопределенными (пока неизвестными) коэффициентами. Коэффициенты находят, подставляя функцию (2) в ЛНДУ (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях.

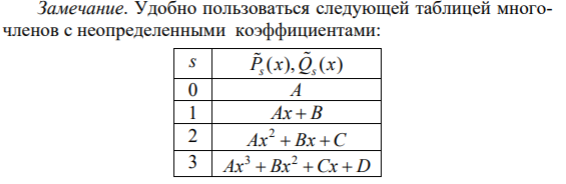
**

**53. Методы решения ЛНДУ. Теорема о наложении решений.**

Рассмотрим ЛНДУ n-го порядка с непрерывными коэффициентами и непрерывной правой частью (свободным членом)   
(1) При решении этого уравнения рассматривают соответствующее ему ЛОДУ т. е. ЛОДУ с такой же левой частью (имеющее такие же коэффициенты), что и ЛНДУ (1). Т 1 (о структуре общего решения ЛНДУ). Общее решение ЛНДУ (1) с непрерывными коэффициентами равно сумме частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего ему ЛОДУ (2): + .  
Т 2 (о наложении решений ЛНДУ). Если y= (х) – частное решение ЛНДУ с правой частью x) : y’’+p(x)y’+q(x)y= x); функция y= (х) – частное решение ЛНДУ с правой частьюx) : y’’+p(x)y’+q(x)y= x) является частным решением ЛНДУ с правой частью x)+x): y’’+p(x)y’+q(x)y=x)+x).

Частное решение ЛНДУ со специальной правой частью (2) ищут в виде

где r – кратность числа α + βi как корня характеристического уравнения данного ЛНДУ (т. е. сколько корней характеристического уравнения равны числу α + βi; будем называть число α + βi контрольной постоянной); – многочлены степени s с неопределенными (пока неизвестными) коэффициентами. Коэффициенты находят, подставляя функцию (2) в ЛНДУ (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях.

**

**Метод вариации произвольных постоянных** Этот метод был предложен Лагранжем и позволяет решать ЛНДУ при условии, что известно общее решение соответствующего ЛОДУ. Рассмотрим метод вариации произвольных постоянных на примере ЛНДУ 2-го порядка y’’+p(x)y’+q(x)y = f(x). Пусть известно общее решение соответствующего ЛОДУ y’’+p(x)y’+q(x)y= 0. Оно имеет вид . где y = и y = – частные решения ЛОДУ, образующие фундаментальную систему решений этого уравнения. По теореме о структуре общего решения ЛНДУ, , т. е. для нахождения общего решения уравнения нужно еще найти какое-нибудь его частное решение. **Метод вариации произвольных постоянных** состоит в том, чтобы искать частное решение ЛНДУ в виде , (5) где – некоторые вспомогательные функции, которые необходимо найти. Чтобы определить функции , подставим в уравнение, для чего найдем +Поскольку вместо одной неизвестной функции мы ввели две неизвестные функции, то потребуем, чтобы эти функции удовлетворяли дополнительному условию =0 Тогда +. Подставляя , в уравнение (3) и вынося функции за скобки, получаем + =  
Здесь выражения в скобках при равны 0, так как функции y = (x) и y = (x) являются решениями ЛОДУ (4), т. е. удовлетворяют этому уравнению. Следовательно, функция (5) является частным решением уравнения (3) тогда и только тогда, когда функции удовлетворяют системе (6) Имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными . Ее определитель W(x)=| ≠0 так как это определитель Вронского для фундаментальной системы решений ЛОДУ. Поэтому система имеет единственное решение. Определяя из системы . и интегрируя, подставляем функции=∫ = ∫ в (5) и получаем частное решение ЛНДУ.

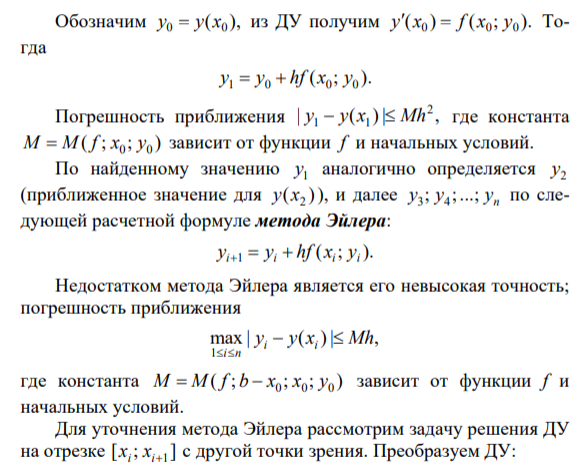
**54. Системы дифференциальных уравнений. Сведение систем к одному дифференциальному уравнению.**

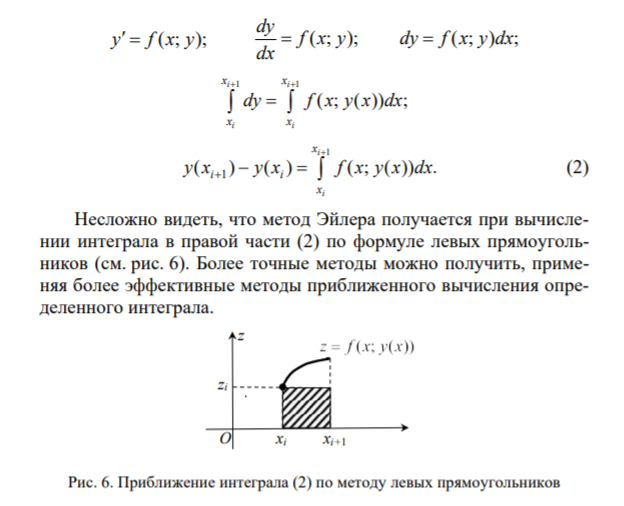
Опр. 1. Система ДУ 1-го порядка, разрешенных относительно производных, т. е. система вида называется нормальной системой ДУ. (При этом предполагается, что количество уравнений равно числу неизвестных функций.) Опр. 2. Решением системы ДУ называется совокупность n функций при подстановке которых в систему каждое уравнение системы обращается в верное равенство. Задача Коши для системы включает n начальных условий Общее решение системы содержит n произвольных постоянных:   
Важность изучения нормальных систем ДУ обусловлена тем, что во многих случаях произвольно заданная система ДУ может быть сведена к нормальной системе.   
Основным методом решения нормальных систем ДУ является метод сведения системы к одному ДУ, порядок которого равен числу неизвестных функций в нормальной системе. Для этого из одного уравнения выражается одна неизвестная функция и подставляется во все другие уравнения. В результате получаем новую систему из n −1 уравнений с n −1 неизвестными функциями, затем исключается следующая неизвестная функция и т. д

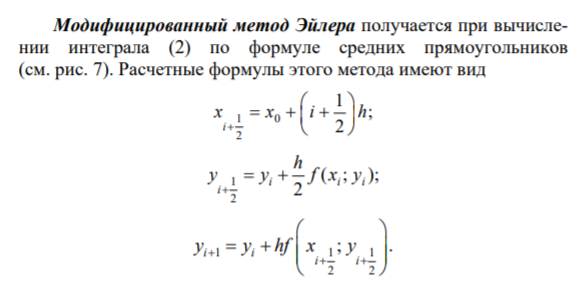
**55. Численные методы решения дифференциальных уравнений**ДУ 1-го порядка:(1).**Метод Эйлера:** Пусть требуется определить значения решения y=y(x) задачи Коши (1) на отрезке 0 с шагом т. е. в точках отрезок равномерно на n частей

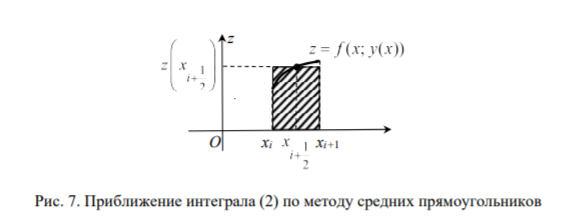
Идея метода Эйлера заключается в том, чтобы для нахождения значения заменить график функции касательной к нему в точке (см. рис. 5). Тогда значение заменится приближенно на значение

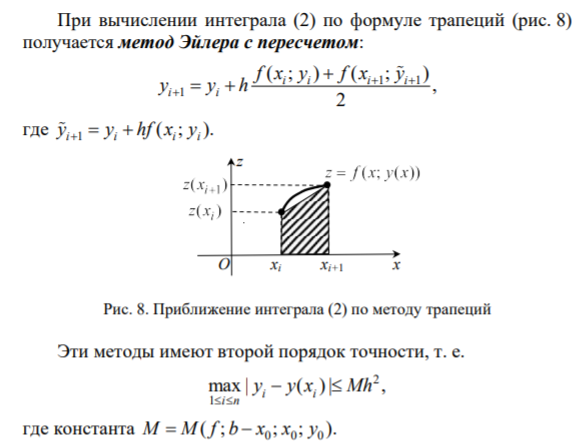


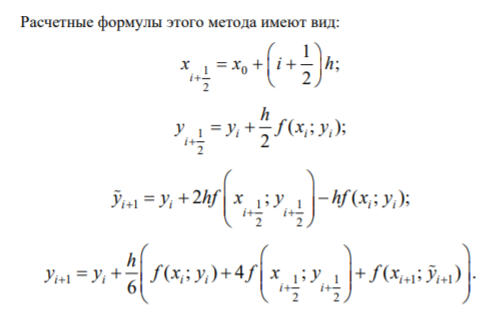
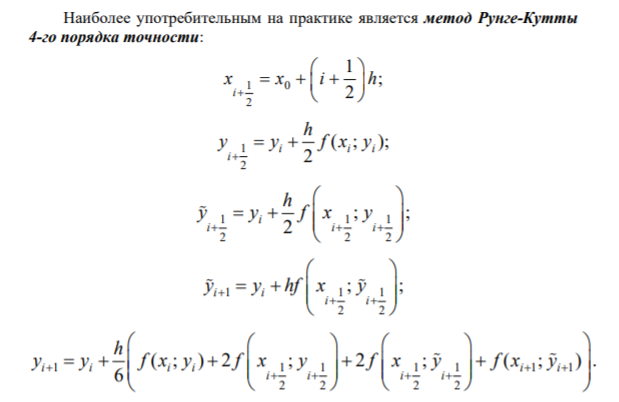




****

****

****

**Метод Рунге-Кутты 3-го порядка точности  
  
  
**